Lista 1

Zadanie 1. Pokaż, że $\mathbb{Z}_p$ istnieje element odwrotny, tj. dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p$ różnego od 0 istnieje a^{-1} takie że $a \cdot a^{-1} = 1$. Możesz to zrobić według następującego schematu:

- dla ustalonego $a \neq 0$ rozważ $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$;
- pokaż, że elementy w tym ciągu są niezerowe i różne;
- wywnioskuj z tego, że a ma element odwrotny w $\mathbb{Z}_p$.

Zadanie 2. Rozważmy zbiór wszystkich (nieskończonych) ciągów o elementach w $\mathbb{R}$. Definiujemy dodawanie takich ciągów po współrzędnych, tak samo mnożenie przez skalar, tj.:

$$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots), \quad \alpha(a_1, a_2, \ldots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots) \ .$$

Jest to przestrzeń liniowa, gdzie $\vec{0}$ to ciąg złożony z samych 0. Dla podanych poniżej podzbiorów tej przestrzeni liniowej określ, które z nich są podprzestrzeniami liniowymi, a które nie. Odpowiedzi *uzasadnij.*

(a) Zbiór ciągów $(a_1, a_2, \ldots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $a_n = n \cdot a_{n-1} + n^2 \cdot a_{n-2}$.

(b) Zbiór ciągów $(b_1, b_2, \ldots)$ takich, że dla każdego $n \geq 2$ mamy $b_n = 3 \cdot b_{n-1} + 2^n - 1$.

(c) Zbiór ciągów $(c_1, c_2, \ldots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-2}$.

(d) Zbiór ciągów $(d_1, d_2, \ldots)$ takich, że skończenie wiele liczb spośród $d_1, d_2, \ldots$ jest dodatnia.

Zadanie 3. Niech $\mathbb{V}$ — przestrzeń liniowa nad $\mathbb{F}$ oraz $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ będą jej podprzestrzeniami.

Pokaż, że $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$ oraz $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ są odpowiednio: największą przestrzenią liniową zawartą w $\mathbb{W}$ i $\mathbb{W}'$ oraz najmniejszą zawierającą $\mathbb{W}$ i $\mathbb{W}$.

Pokaż też, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, iloczyn kartezjański $\mathbb{V} \times \mathbb{V}'$ z dodawaniem i mnożeniem po współrzędnych, jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Zadanie 4. Sprawdź, czy następujące podzbiory $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami liniowymi:

1. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 0\}$
2. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
3. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
4. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
5. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
6. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 1\}$
7. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 0\}$
8. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 1\}$
9. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
10. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$

Zadanie 5. Pokaż, że następujące zbiory funkcji

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ \text{zbiór } \{r \ : \ f(r) \neq 0\} \text{ jest przeliczalny}\}$$
$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ f \text{ ma skończenie wiele wartości}\}$$

są podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Zadanie 6. Pokaż wprost z definicji, że: U jest zbiorem liniowo zależnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim wektor $u \in U$, taki że

$$\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(U \setminus \{u\}).$$

Pokaż też, że jeśli U nie zawiera wektora zerowego $\vec{0}$, to są przynajmniej dwa takie wektory u.

Zaneguj obustronnie tę równoważność, aby uzyskać charakteryzację zbioru liniowo zależnego.

Zadanie 7. Niech $\mathbb{V}$, przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{F}$, $U = (v_1, v_2 \ldots, v_k)$ będzie układem wektorów z $\mathbb{V}$, zaś $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ ciąg skalarów, takich że $\alpha_1 \neq 0$. Pokaż, że

$$\mathrm{LIN}\left(\left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_2 \ldots, v_k\right\}\right) = \mathrm{LIN}\left(\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}\right).$$

Zadanie 8. Przedstaw wektor w jako kombinację podanych wektorów v_1, v_2, $\ldots$, v_k (lub uzasadnij, że to niemożliwe), nad ciałem $\mathbb{R}$:

1. $w = (1, 5)$, $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (2, 0)$.
2. $w = (5, 10, 11)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (1, 1, 1)$.
3. $w = (5, 10, 11)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (1, 8, 7)$.
4. $w = (4, 17, 18)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (3, 9, 11)$.

Zadanie 9. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Z}_3^3$ (zbiór trzyelementowych ciągów elementów z $\mathbb{Z}_3$, nad ciałem $\mathbb{Z}_3$). Ile wektorów należy do $\mathrm{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 1))$? A ile do $\mathrm{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 2))$?

Zadanie 10. Pokaż równoważność następujących warunków (dla $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$):

- Zbiór B jest liniowo niezależny.
- Wektor $\vec{0}$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
- Pewien wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
- Każdy wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów z B.

Zaneguj powyższe warunki, aby uzyskać charakteryzację zbiorów liniowo zależnych.

Zadanie 11 (* Nie liczy się do podstawy)**.** Niech M będzie zbiorem skończonym. Na zbiorze jego podzbiorów 2^M określamy operacje:

$$U + U' := U \triangle U', \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną, tj. $U \triangle U' = (U \setminus U') \cup (U' \setminus U)$. Pokaż, że tak określony zbiór jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$.

Niech $U_1, U_2, \ldots, U_k \subseteq M$ są takie, że dla każdego i zbiór U_i nie jest podzbiorem sumy pozostałych zbiorów, tj. $U_i \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} U_j$. Pokaż, że $U_1, U_2, \ldots, U_k$ są liniowo niezależne.