Lista 2

Zadanie 1. Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$)? Rozszerz ich maksymalny podzbiór niezależny do bazy.

1. $(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1),(1,0,1)$;
2. $(0,1,2),(1,1,1),(1,1,1)$;
3. $(1,0,1,0),(1,2,0,1),(0,2,1,1),(0,0,1,1)$;
4. $(1,0,1,0),(0,2,0,2),(1,1,0,0),(0,0,2,1)$.

Zadanie 2. Uzasadnij, że poniższe zbiory wektorów są liniowo niezależne (w odpowiednim $\mathbb{R}^n$), rozszerz je do bazy (odpowiedniego) $\mathbb{R}^n$:

- $(2,2,7,-1),(3,-1,2,4),(1,1,3,1)$;
- $(2,3,-4,-1),(1,-2,1,3)$;
- $(2,3,5,-4,1),(1,-1,2,3,5)$.

Zadanie 3. Rozważamy przestrzenie nad $\mathbb{R}$. Niech $v_1, v_2, \dots, v_n$ będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiory wektorów

- $\{\alpha v_1 + v_2, v_1 + \alpha v_2\}$
- $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + \alpha v_1\}$

są liniowo niezależne?

Wskazówka: Można bezpośrednio z definicji, ale szybciej: zauważ, że $v_1, \dots, v_n$ są bazą przestrzeni liniowej (jakiej). Można na nich zastosować eliminację Gaußa.

Zadanie 4. Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$ (będących podprzestrzeniami $\mathbb{V}$) zachodzi

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}') = 1 + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') \ .$$

Udowodnij, że suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest jedną z przestrzeni $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$, a przecięcie $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$—drugą.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{U}, \mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$. Udowodnij zawieranie:

$$(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}') \leq \mathbb{U} \cap (\mathbb{W} + \mathbb{W}')$$

Pokaż, że jeśli $\mathbb{W} \leq \mathbb{U}$ to w zachodzi równość obu stron zawierania.

Zadanie 6. Wyraź w bazach $B = \{(1,2,3); (0,1,2); (0,0,1)\}$ oraz $C = \{(1,-1,2); (0,1,1); (0,-1,1)\}$ wektory

- $(1,0,0)$
- $(0,1,0)$
- $(0,0,1)$
- $(7,3,2)$
- $(-2,1,5)$
- $(3,-2,1)$.

Zadanie 7. Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ dla

- $S = \{(1,2,0,1),(1,1,1,0)\}$, $T = \{(1,0,1,0),(1,3,0,1)\}$;
- $S = \{(2,-1,0,-2),(3,-2,1,0),(1,-1,1,-1)\}$, $T = \{(3,-1,-1,0),(0,-1,2,3),(5,-2,-1,0)\}$.

Zadanie 8 (* Nie liczy się do podstawy.). *Uwaga: w tym zadaniu nie można korzystać z twierdzenia o równoliczności baz ani z lematu o wymianie.*

Używając eliminacji Gaußa udowodnij następujące twierdzenie:
Jeśli $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, to zbiór liczący $k+1$ wektorów jest liniowo zależny.

W tym celu wyraź wektory $v_1, \dots, v_{k+1}$ w bazie B i przeprowadź na tej reprezentacji eliminację Gaußa.

Wywnioskuj z tego twierdzenia, że każde dwie bazy przestrzeni skończenie wymiarowej są równoliczne.

Zadanie 9. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq \mathbb{V}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. istnieje wektor $u \in \mathbb{V}$, taki że $U = u + \mathbb{W}$;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U = u + \mathbb{W}$;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zachodzi $U = u + \mathbb{W}$.

Udowodnij też równoważność poniższych warunków:

1. istnieje wektor $u \in \mathbb{V}$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zbiór $U - u$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 10. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś U i U' jej warstwami. Pokaż, że

$$U = U' \quad \text{lub} \quad U \cap U' = \emptyset \ .$$

Możesz skorzystać z Zadania 9, nawet jeśli nie potrafisz go udowodnić.

Zadanie 11. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, zaś U i U' warstwami jakichś (niekoniecznie takich samych) podprzestrzeni $\mathbb{V}$.

Pokaż, że przecięcie $U \cap U'$ jest puste lub jest warstwą (jakiejś podprzestrzeni).