Lista 4

Zadanie 1. Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B, takich że $AB = BA$, jest przestrzenią liniową.

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.

Wskazówka: Można na palcach, ale można też prawie bez rachunków: zauważ, że każda macierz komutuje z Id oraz M komutuje z M. Oblicz też wymiar przestrzeni tych macierzy.

Zadanie 2. Pokaż, że dla macierzy A, B odpowiednich rozmiarów zachodzi

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T \quad , \\ (A^T)^T &= A \\ (A + B)^T &= A^T + B^T \quad . \end{aligned}$$

Zadanie 3. Wyznacz bazę jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 4. Niech M będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Pokaż, że:

- $\ker(L_M) \subseteq \ker(L_{M^2})$, gdzie L_M to przekształcenie $v \mapsto Mv$, analogicznie L_{M^2};
- $\mathrm{rk}([M|M^2]) = \mathrm{rk}(M)$ (dla przypomnienia: $[M|M^2]$ to macierz otrzymana poprzez napisanie obok siebie macierzy M i M^2);
- $\mathrm{rk}(M + M^2) \leq \mathrm{rk}(M)$.

Wskazówka: W drugim punkcie skorzystaj z tego, że $\mathrm{rk}(M) = \dim \mathrm{Im}\, L_M$ albo z poprzedniego punktu.

Zadanie 5. Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach w $\mathbb{R}$) w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 6 (* Nie takie trudne, ale powiedzmy, że nie liczy się do podstawy). Niech M będzie macierzą wymiaru $n \times n$ postaci:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Oblicz rząd macierzy M^k dla każdego $k \geq 1$. *Uzasadnij odpowiedź.*

Zadanie 7. Podaj macierz odwrotną do macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 8. Niech A, B będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru. Pokaż, że

- Jeśli AB jest odwracalna to A i B również są odwracalne.
- Jeśli A, B są odwracalne, to AB też jest odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Jeśli A jest odwracalna, to $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^{-1} jest odwracalna i $(A^{-1})^{-1} = A$.

Zadanie 9. Niech M będzie odwracalną macierzą dolnotrójkątną/górnotrójkątną/symetryczną/diagonalną. Pokaż, że M^{-1} również jest dolnotrójkątna/górnotrójkątna/symetryczna/diagonalna.

Zadanie 10. Znajdź wszystkie macierze A wymiaru 2×2 spełniające warunek $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Wskazówka: Pokaż najpierw, że $\mathrm{rk}(A) = 2$ implikuje $\mathrm{rk}(A^2) = 2$. Potem rozpatrz możliwe $\mathrm{rk}(A)$.

Zadanie 11. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są odwracalne i podaj ich macierze odwrotne:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$