Lista 2

Zadanie 1. Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$)? Rozszerz ich maksymalny podzbiór niezależny do bazy.

1. $(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1),(1,0,1)$;
2. $(0,1,2),(1,1,1),(1,1,1)$;
3. $(1,0,1,0),(1,2,0,1),(0,2,1,1),(0,0,1,1)$;
4. $(1,0,1,0),(0,2,0,2),(1,1,0,0),(0,0,2,1)$.

Rozwiązanie Zauważmy, że układ wektorów $(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1),(1,0,1)$ nie może być niezależny, bo ma 4 wektory w 3-wymiarowej przestrzeni. Sprawdźmy, że pierwsze 3 wektory są liniowo niezależne:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{(3)-(1)} \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Te wektory są w postaci schodkowej, czyli są liniowo niezależne.

Sprawdźmy teraz $(1,0,1,0),(1,2,0,1),(0,2,1,1),(0,0,1,1)$:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{(3)-(4),\frac{1}{2}\cdot(3)} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{(2)-2(3),(1)-(4)} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{(1)-(2)} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

I ten układ jest niezależny (po przestawieniu wektorów jest w postaci schodkowej).

Zadanie 2. Uzasadnij, że poniższe zbiory wektorów są liniowo niezależne (w odpowiednim $\mathbb{R}^n$), rozszerz je do bazy (odpowiedniego) $\mathbb{R}^n$:

- $(2, 2, 7, -1), (3, -1, 2, 4), (1, 1, 3, 1)$;
- $(2, 3, -4, -1), (1, -2, 1, 3)$;
- $(2, 3, 5, -4, 1), (1, -1, 2, 3, 5)$.

Rozwiązanie Rozważmy drugi przykład.

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{matrix} \xrightarrow{(1)-2(2)} \begin{matrix} 0 & 7 & -6 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Ten układ jest liniowo niezależny. Aby rozszerzyć go do bazy, weźmy np. $\vec{E}_3, \vec{E}_4$.

$$\begin{matrix} 0 & 7 & -6 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Ten układ jest w postaci schodkowej, ma 4 elementy, taki sam jak wymiar przestrzeni, czyli jest bazą. (Zauważmy, że brakując elementy bazy zawsze można dobrać z bazy standardowej.)

Zadanie 3. Rozważamy przestrzenie nad $\mathbb{R}$. Niech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiory wektorów

- $\{\alpha v_1 + v_2, v_1 + \alpha v_2\}$
- $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + \alpha v_1\}$

są liniowo niezależne?

Wskazówka: Można bezpośrednio z definicji, ale szybciej: zauważ, że $v_1, \ldots, v_n$ są bazą przestrzeni liniowej (jakiej). Można na nich zastosować eliminację Gaußa.

Rozwiązanie W pierwszym podpunkcie, odejmijmy α razy drugi wektor od pierwszego, uzyskujemy w ten sposób

$$\{(1-\alpha^2)v_2, v_1 + \alpha v_2\}$$

Jeśli $\alpha \in \{-1, 1\}$, to ten układ jest liniowo zależny, czyli był też ten oryginalny. W przeciwnym wypadku (nowy) układ jest liniowo niezależny: możemy pomnożyć pierwszy wektor przez $(1-\alpha^2)^{-1}$ i odjąć α raz od drugiego, uzyskując układ $\{v_2, v_1\}$, który jest niezależny. Czyli również oryginalny układ był niezależny.

W drugim podpunkcie przytnijmy naszą przestrzeń do generowanej przez $v_1, \ldots, v_n$ i wyraźmy wektory w bazie $v_1, \ldots, v_n$. Uzyskane wektory można zapisać jako (puste ola oznaczają 0):

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & & \cdots & \\
 & 1 & 1 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & 1 & 1 \\
\alpha & & & & 1
\end{array}$$

Następnie odejmujemy od $n-1$-szego wiersza n-ty

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & & \cdots & \\
 & 1 & 1 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
-\alpha & & & 1 & \\
\alpha & & & & 1
\end{array}$$

Potem od $n-2$-go $n-1$-szy, $n-3$-go $n-2$-gi itd., aż od drugiego odejmiemy trzeci, uzyskując

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & & \cdots & \\
(-1)^{n-2}\alpha & 1 & & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
-\alpha & & & 1 & \\
\alpha & & & & 1
\end{array}$$

tj. w i-tym wierszu (dla $i > 1$) mamy

$$((-1)^{n-i}\alpha, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{te miejsce}}, 0, \ldots, 0)\ .$$

W ostatnim kroku od drugiego wiersza odejmujemy $(-1)^{n-2}\alpha$ razy pierwszy, otrzymując

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & & \cdots & \\
0 & 1-(-1)^{n-2}\alpha & & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
-\alpha & & & 1 & \\
\alpha & & & & 1
\end{array}$$

Jeśli $1 - (-1)^{n-2}\alpha = 0$ ($\iff \alpha = (-1)^n$) to układ jest zależny (bo drugi wiersz to $\vec{0}$), w przeciwnym przypadku możemy odjąć od pierwszego wiersza wielokrotność drugiego, by uzyskać postać schodkową, czyli układ wektorów liniowo niezależnych.

Zadanie 4. Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$ (będących podprzestrzeniami $\mathbb{V}$) zachodzi

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}') = 1 + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') \ .$$

Udowodnij, że suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest jedną z przestrzeni $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$, a przecięcie $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$—drugą.

Rozwiązanie Przypomnijmy, że

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}') = \dim(\mathbb{W}) + \dim(\mathbb{W}') - \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}')$$

Porówując z zależnością w treści dostajemy

$$\dim(\mathbb{W}) + \dim(\mathbb{W}') - \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') = 1 + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}')$$

Po przeniesieniach

$$\dim(\mathbb{W}) + \dim(\mathbb{W}') - 1 = 2\dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}')$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') &\leq \dim(\mathbb{W}) \\ \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') &\leq \dim(\mathbb{W}') \end{aligned}$$

Wymiar jest liczbą naturalną, gdyby więc dodatkowo zachodziło

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') &\leq \dim(\mathbb{W}) + 1 \\ \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') &\leq \dim(\mathbb{W}') + 1 \end{aligned}$$

to mielibyśmy

$$2\dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') \leq \dim(\mathbb{W}) + \dim(\mathbb{W}') + 2$$

co jest sprzeczne z wcześniejszą obserwacją. Czyli w przynajmniej jednym przypadku mam równość, tj.

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') &= \dim(\mathbb{W}) \quad \text{lub} \\ \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') &= \dim(\mathbb{W}') \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że jeśli $\mathbb{V}' \leq \mathbb{V}$ oraz $\dim(\mathbb{V}') = \dim(\mathbb{V})$ to $\mathbb{V}' = \mathbb{V}$: bo bazę $\mathbb{V}'$ można rozszerzyć do bazy $\mathbb{V}$, a obie są tej samej mocy. Czyli dostajemy, że

$$\begin{aligned} \mathbb{W} \cap \mathbb{W}' &= \mathbb{W} \quad \text{lub} \\ \mathbb{W} \cap \mathbb{W}' &= \mathbb{W}' \end{aligned}$$

co oznacza

$$\begin{aligned} \mathbb{W}' &\leq \mathbb{W} \quad \text{lub} \\ \mathbb{W} &\leq \mathbb{W}' \end{aligned}$$

Zadanie 5. Niech $\mathbb{U}, \mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$. Udowodnij zawieranie:

$$(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}') \leq \mathbb{U} \cap (\mathbb{W} + \mathbb{W}')$$

Pokaż, że jeśli $\mathbb{W} \leq \mathbb{U}$ to w zachodzi równość obu stron zawierania.

Rozwiązanie Zauważmy, że suma przestrzeni wektorowych jest monotoniczna po obu argumentach, tj.

$$A \leq A', B \leq B' \implies A + B \leq A' + B'$$

co wynika wprost z definicji: $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ i każda suma postaci $a + b$, gdzie $a \in A, b \in B$ jest też w $A' + B'$, bo $A \leq A', B \leq B'$.

Przechodząc do treści zadania: zauważmy, że z jednej strony:

$$(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) \leq \mathbb{U}, (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}') \leq \mathbb{U} \implies (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}') \leq \mathbb{U} + \mathbb{U} = \mathbb{U}$$

Jednocześnie

$$(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) \leq \mathbb{W}, (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}') \leq \mathbb{W}' \implies (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}') \leq \mathbb{W} + \mathbb{W}'$$

Łącząc te dwa zawierania dostajemy

$$(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}') \leq \mathbb{U} \cap (\mathbb{W} + \mathbb{W}')$$

Przechodząc do drugiego punktu: przyjrzyjmy się lewej stronie, tj. $(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}')$. Używając założenia można to uprościć do

$$(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}') = \mathbb{W} + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}')$$

Rozważmy dowolny wektor z prawej strony, tj.

$$\mathbb{U} \cap (\mathbb{W} + \mathbb{W}')$$

jest on postaci $w + w'$, gdzie $w \in \mathbb{W}, w' \in \mathbb{W}'$, jednocześnie $w + w' \in \mathbb{U}$. Zauważmy, że skoro $w \in \mathbb{U}$, to również $-w \in \mathbb{U}$ i w takim razie $w' = w + w' - w \in \mathbb{U}$. Czyli $w' \in \mathbb{W}' \cap \mathbb{U}$. I w takim razie

$$w + w' \in \mathbb{W} + (\mathbb{W}' \cap \mathbb{U})$$

,

Zadanie 6. Wyraź w bazach $B = \{(1,2,3); (0,1,2); (0,0,1)\}$ oraz $C = \{(1,-1,2); (0,1,1); (0,-1,1)\}$ wektory

- $(1,0,0)$
- $(0,1,0)$
- $(0,0,1)$
- $(7,3,2)$
- $(-2,1,5)$
- $(3,-2,1)$.

Rozwiązanie Wyraźmy wektor $\vec{E_1} = (1,0,0)$ w bazie B, oznaczmy $\vec{b_1} = (1,2,3), \vec{b_2} = (0,1,2), \vec{b_3} = (0,0,1)$. Jeśli $(\vec{E_1})_B = (\alpha, \beta, \gamma)$ to

$$\alpha \cdot b_1 + \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot b_3 = E_1$$

Co sprowadza się do układu równań

$$\begin{cases} 1 \cdot \alpha & +0 \cdot \beta & +0 \cdot \gamma & = & 1 \\ 2 \cdot \alpha & +1 \cdot \beta & +0 \cdot \gamma & = & 0 \\ 3 \cdot \alpha & +2 \cdot \beta & +1 \cdot \gamma & = & 0 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania dostajemy $\alpha = 1$, wtedy z drugiego $\beta = -2$ oraz z trzeciego $\gamma = 1$. Czyli

$$(1,0,0)_B = (1,-2,1)$$

Używając analogicznego podejścia pokazujemy, że

$$(0,1,0)_B = (0,1,-2) \quad (0,0,1)_B = (0,0,1)$$

Korzystając z tego, że reprezentacja w bazie jest homomorfizmem, mamy:

$$\begin{aligned} (7,3,2)_B &= 7 \cdot (E_1)_B + 3(E_2)_B + 2(E_3)_B \\ &= 7 \cdot (1,-2,1) + 3 \cdot (1,-2,1) + 2 \cdot (0,0,1) \\ &= (10,-16,12) \end{aligned}$$

Pozostałe przykłady liczymy w podobny sposób.

Zadanie 7. Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ dla

- $S = \{(1,2,0,1),(1,1,1,0)\}$, $T = \{(1,0,1,0),(1,3,0,1)\}$;
- $S = \{(2,-1,0,-2),(3,-2,1,0),(1,-1,1,-1)\}$, $T = \{(3,-1,-1,0),(0,-1,2,3),(5,-2,-1,0)\}$.

Rozwiązanie W pierwszym przykładzie widać, że oba układy są liniowo niezależne — wystarczy od jednego wektora odjąć drugi, by dostać układ w postaci schodkowej. Czyli

$$\dim(\mathrm{LIN}(S)) = \dim(\mathrm{LIN}(T)) = 2$$

Zobaczmy teraz, ile jest wektorów niezależnych w $S \cup T$:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{(4)-(1)} \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{(1)-2\cdot(4),(2)-(4)} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Układ jest zależny, bo drugi i trzeci wiersza są takie same. Jednocześnie pozostałe wektory są niezależne (postać schodkowa). Czyli

$$\dim(\mathrm{LIN}(S \cup T)) = 3$$

W takim razie

$$\dim(\mathrm{LIN}(S \cap T)) = \dim(\mathrm{LIN}(S)) + \dim(\mathrm{LIN}(T)) - \dim(\mathrm{LIN}(S \cup T)) = 2 + 2 - 3 = 1 \ .$$

Zadanie 8 (* Nie liczy się do podstawy.). *Uwaga: w tym zadaniu nie można korzystać z twierdzenia o równoliczności baz ani z lematu o wymianie.*

Używając eliminacji Gaußa udowodnij następujące twierdzenie:
Jeśli $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, to zbiór liczący $k + 1$ wektorów jest liniowo zależny.

W tym celu wyraź wektory $v_1, \ldots, v_{k+1}$ w bazie B i przeprowadź na tej reprezentacji eliminację Gaußa.

Wywnioskuj z tego twierdzenia, że każde dwie bazy przestrzeni skończenie wymiarowej są równoliczne.

Zadanie 9. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq \mathbb{V}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. istnieje wektor $u \in \mathbb{V}$, taki że $U = u + \mathbb{W}$;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U = u + \mathbb{W}$;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zachodzi $U = u + \mathbb{W}$.

Udowodnij też równoważność poniższych warunków:

1. istnieje wektor $u \in \mathbb{V}$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zbiór $U - u$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 10. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś U i U' jej warstwami. Pokaż, że

$$U = U' \quad \text{lub} \quad U \cap U' = \emptyset \ .$$

Możesz skorzystać z Zadania 9, nawet jeśli nie potrafisz go udowodnić.

Rozwiązanie Niech U, U' będą warstwami podprzestrzeni $\mathbb{W}$.

Rozważmy przecięcie $U \cap U'$. Jeśli jest puste, to teza jest spełniona. Jeśli nie jest, to niech $\vec{v} \in U \cap U'$. Wtedy zgodnie z Zadaniem 9 mamy

$$U = \vec{v} + \mathbb{W}$$
$$U' = \vec{v} + \mathbb{W}$$

Zauważmy, że

$$U \cap U' = (\vec{v} + \mathbb{W}) \cap (\vec{v} + \mathbb{W})$$

wprost z definicji sumy łatwo sprawdzić, że

$$(\vec{v} + \mathbb{W}) \cap (\vec{v} + \mathbb{W}) = \vec{v} + \mathbb{W}$$

Co daje tezę.

Zadanie 11. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, zaś U i U' warstwami jakichś (niekoniecznie takich samych) podprzestrzeni $\mathbb{V}$.

Pokaż, że przecięcie $U \cap U'$ jest puste lub jest warstwą (jakiejś podprzestrzeni).

Rozwiązanie Rozważmy przecięcie $U \cap U'$. Jeśli jest puste, to teza jest spełniona. Jeśli nie jest, to niech $\vec{v} \in U \cap U'$. Wtedy zgodnie z Zadaniem 9 mamy

$$U = \vec{v} + \mathbb{W}$$
$$U' = \vec{v} + \mathbb{W}'$$

dla odpowiednich przestrzeni liniowych $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$. Zauważmy, że

$$U \cap U' = (\vec{v} + \mathbb{W}) \cap (\vec{v} + \mathbb{W}')$$

wprost z definicji sumy łatwo sprawdzić, że

$$(\vec{v} + \mathbb{W}) \cap (\vec{v} + \mathbb{W}') = \vec{v} + (\mathbb{W} \cap \mathbb{W}')$$

Wiemy, że $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ jest podprzestrzenią, i tym samym $U \cap U'$ jest warstwą przestrzeni $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$.