[redacted]

zad 9.

a) $1 \Rightarrow 2$

oczywiste, jako że $\vec{0} \in W \Rightarrow u \in U$

$2 \Rightarrow 3$ (jeżeli takiego wektora nie ma to tw. zachodzi)

weźmy dowolny $v \in U$, wówczas $v = u + w_1$ dla pewnego $\omega_1 \in W$

chcemy pokazać, że $\underbrace{(u+w_1)}_{v} + W = u + W$

($\subseteq$) Rozważmy dowolny el. V, jest postaci $(u+w_1) + \underset{W}{\omega_2}$

Wtedy: $u + w_1 + w_2 = u + (w_1 + w_2) \in u + W$

($\supseteq$) Rozważmy dowolny el. z $u+W$, jest postaci $u + \underset{W}{w}$

Wtedy $u + w = u + w_1 + \underset{W}{(w - w_1)} \in (u+w_1) + W$

$3 \Rightarrow 1$

oczywiste (zakładając, że $U \neq \emptyset$), jako że $U \leq V$

b) $1 \Rightarrow 2$

$\vec{0} \in U - u \Rightarrow u \in U$

$2 \Rightarrow 3$

weźmy dowolny $v \in U \setminus \{u\}$, (jeżeli takiego wektora nie ma, to tw. zachodzi)

chcemy pokazać, że $U - v \leq V$

weźmy dowolne dwa wektory należące do $U - v$, tj. $u_1 - v$, $u_2 - v$

chcemy pokazać, że $u_1 + u_2 - v - v \in U - v$, tj. $u_1 + u_2 - v \in U$

zauważmy, że $u_1 - u$, $u_2 - u$, $v - u \in U - u \Rightarrow$

$$(u_1 - u) + (u_2 - u) - (v - u) \in U - u$$
$$\shortparallel$$
$$u_1 + u_2 - v - u$$
$$\Downarrow$$
$$u_1 + u_2 - v \in U$$

Weźmy teraz dowolny skalar α

chcemy pokazać, że $\alpha(u_1 - v) = \alpha u_1 - \alpha v = \alpha u_1 - (\alpha - 1)v - v \in U - v$

czyli, że $\alpha u_1 - (\alpha - 1)v \in U$

zauważmy, że $\alpha u_1 - \alpha u$, $(\alpha-1)v - (\alpha-1)u \in U - u \Rightarrow$

$$(\alpha u_1 - \alpha u) - \big((\alpha-1)v - (\alpha-1)u\big) \in U - u$$
$$\shortparallel$$
$$\alpha u_1 - (\alpha-1)v - u$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha u_1 - (\alpha-1)v \in U$$

$3 \Rightarrow 1$

oczywiste (zakładając, że $U \neq \emptyset$), jako że $U \leq V$

dodatkowo $U - v$ jest niepusty (bo $U \ni u$)