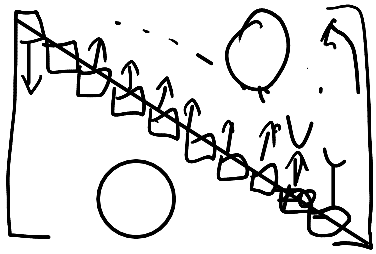
4.8 Jeszcze o eliminacji Gaußa

Lemat 4.33. *Jeśli macierz M jest odwracalna, to przy użyciu eliminacji Gaußa (na wierszach lub kolumnach) można doprowadzić ją do macierzy przekątniowej (bez zer na przekątnej).*

Używając eliminacji Gaußa zarówno na wierszach jak i na kolumnach można dowolną macierz kwadratową przekształcić do macierzy przekątniowej. Ponadto, można najpierw wykonać wszystkie operacje na wierszach a potem na kolumnach (lub odwrotnie).

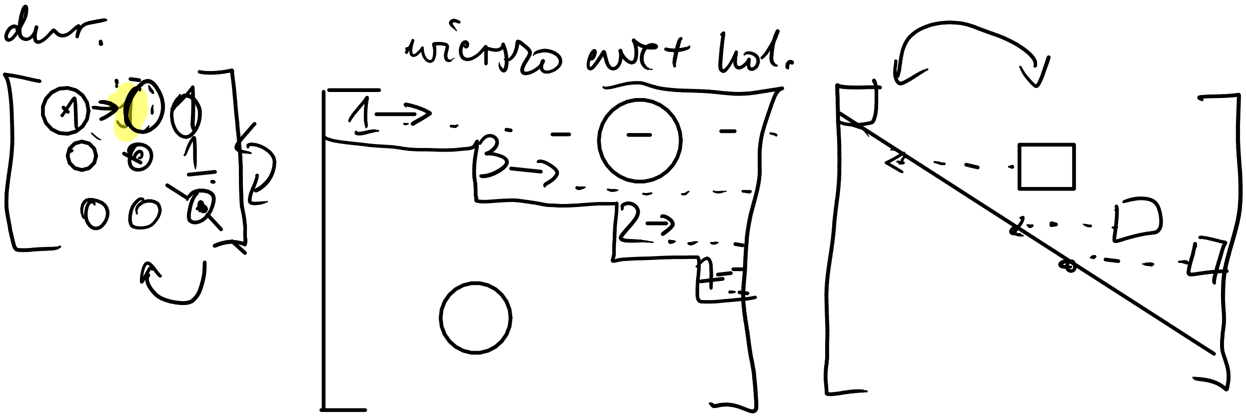


n×n

1) Odwracalna

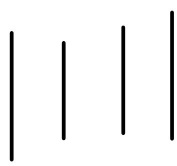
2) Nieodw.

wiersze wiersz + kol.



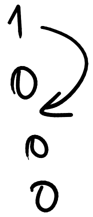
rk (A)

- można mieszać op wier / kol.
- baza?



op. kol.

LIN się zach.



Lemat 4.33 można zinterpretować jako mnożenie macierzy elementarnych.

Lemat 4.34. *Każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych Co więcej, macierze $D_{i\alpha}$ mogą być ostatnie lub pierwsze.*

Każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych oraz macierzy postaci $D_{i,0}$ (lub jednej macierzy przekątniowej).

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Op el $\leftrightsquigarrow$ mn. macierzy

El. Gaussa $\rightsquigarrow$ $\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$

$$D_{i\alpha} = \begin{array}{c|c} & i \\ \hline i & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A \rightsquigarrow D \rightsquigarrow \mathrm{Id}$$

$$\leftsquigarrow$$

$$D_{i0} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\forall \ L : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m \qquad m \times n$$

$$\exists M \qquad L = L_M$$

M

L_M

$$L_M(\vec{v}) = M\vec{v}, \quad \vec{v} \in \mathbb{F}^n$$

dim n dim m $\mathbb{F}$

V, W – pr. lin.

$$\begin{array}{ccccc}
L: & V & \longrightarrow & W \\
 & \varphi \wr | & \varphi' L' \varphi = L & \wr | \varphi' \\
L': & \mathbb{F}^n & \longrightarrow & \mathbb{F}^m
\end{array}$$

$$L' \qquad L' = L_M \qquad M \approx L$$

Rozdział 5

Przekształcenia liniowe i macierze

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "F"] & W \arrow[d, "(\ )_{B_W}"] \\
F^n \arrow[u, bend left, "L'"] \arrow[u, "\cong", "E_1"'] \arrow[r] & F^m
\end{tikzcd}
$$

$$M = L'(E_i) \qquad E_i \mapsto v_i$$

$$L : F^n \to F^m$$

$$M = [\, L(E_1) | \ldots | L(E_m) \,]$$

$$(\ )_{E_1 \ldots E_m} \in F^m$$

$F \rightsquigarrow M \qquad F_M = F$

$$M = [C_1 | C_2 | \dots | C_n]$$

$$\underline{C_i} = M \vec{E_i}$$

$F = F_M \qquad F(E_i) = C_i = M \cdot E_i$

$F \to M \qquad [\ \ | F(E_i)]$

$F_M = F$

$L : F^n \to F^m \qquad \exists M \qquad L_M \qquad L_M(v) = Mv$

$L_M = L$

$M \rightsquigarrow L_M$

L chcemy M

$$Mv = L(v)$$

$$M = [C_1 | C_2 | \dots | C_n] \qquad \vec{E_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ i-te}$$

$$C_i = \underline{M \cdot \vec{E_i}}$$

$$\underbrace{M E_i}_{c_i} = \cancel{\ } L(\vec{E_i})$$

$$M = [L(\vec{E_1}) | L(\vec{E_2}) | \dots | L(\vec{E_n})]$$

$L(E_i) = M E_i$

$F^n \to F^m$

5.1 Wyrażanie przekształcenia liniowego w bazie

Definicja 5.1 (Macierz przekształcenia w bazie)**.** Dla przestrzeni liniowych $\mathbb{V}, \mathbb{W}$, przekształcenia liniowego $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $B_\mathbb{V}, B_W$: baz odpowiednio $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{W}$, gdzie $B_\mathbb{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ oraz $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ macierz $M_{B_\mathbb{V} B_W}(F)$ (*macierz przekształcenia F wyrażona w bazach $B_\mathbb{V}$ i B_W*) to macierz zadana jako

$$M_{B_V B_W}(F) = [(F(v_1))_{B_W} | (F(v_2))_{B_W} | \cdots | (F(v_n))_{B_W}] \ .$$

$v_1 \dots v_m$

$Fv_i \in W$

Jest to macierz rozmiaru $m \times n$.

Uwaga. Zwykle $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ oraz $B_\mathbb{V} = B_W$. Ponadto, dla $\mathbb{V} = \mathbb{F}^n$ i $W = \mathbb{F}^m$ bazami są zwykle bazy standardowe.

$B_V = E_1 \dots E_m$ $B_W = E_1 \dots E_m$ $[FE_1 | FE_2 | \cdots | FE_m]$

M ? ME_1

Uwaga. Zauważmy, że to formalizuje dokładnie pomysł z początku rozdziału.

Przykład 5.2. Rozważmy przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone jako: $F(x, y, z) = (x + y, y - z)$. Wtedy jego macierz w bazach standardowych dla $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathbb{R}^2$ to

$M \to F_M$ $F_M(v) = Mv$

$F \rightsquigarrow M$ $F_M = F$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$F(E_1) = (1,0)^T$
$F(E_2) = (1,1)$
$F(E_3) = (0,-1)^T$

$B_V = E_1, E_2, E_3$
$B_W = E_1, E_2$
$E_2 = (0,1,0)$

Rozważmy to samo przekształcenie w bazach $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ oraz $\{(1, 1), (1, -1)\}$. Wektory $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ zostaną przekształcone na odpowiednio:

B_V B_W

$F(x,y,z) = (x+y, y-z)$

$$(2, 0), (1, 0), (2, 1) \ ,$$

$F(v_1), F(v_2), F(v_3)$

które wyrażają się w bazie $\{(1, 1), (1, -1)\}$ jako

$F(v_1) = F(1,1,1) = (2,0)$
$F(v_2) = F(0,1,1) = (1,0)$
$F(v_3) = F(1,1,0) = (2,1)$

$$B_{B_V B_W}(F) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \ .$$

$M_{B_V, B_E}(F) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M_{B_V, B_W}(F) =$ $x \cdot \binom{1}{1} + y \cdot \binom{1}{-1} = \binom{2}{1}$ ($1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$)

$\binom{2}{0}_{B_W} = \binom{1}{1}$

$\binom{1}{0}_{B_W} = \binom{0,5}{0,5}$

$\binom{2}{1}_{B_W} =$

$1 \cdot \binom{1}{1} + 1 \cdot \binom{1}{-1} = \binom{2}{0}$

$1\frac{1}{2}\binom{1}{1} + \frac{1}{2}\binom{1}{-1} = \binom{2}{1}$

Lemat 5.3. *Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$: przekształcenie oraz $B_{\mathbb{V}}, B_W$ będą bazami odpowiednio $\mathbb{V}$ oraz W, gdzie $B_{\mathbb{V}} = \{v_1, \dots, v_n\}$ oraz $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$. Wtedy dla każdego wektora $v \in \mathbb{V}$:*

$$\underline{M_{B_{\mathbb{V}}B_W}(F)(v)_{B_{\mathbb{V}}}} = (Fv)_{B_W}$$

$F \quad M$

$F(v) = M(v)$

$B_W \quad B_V$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "B_V"'] & \mathbb{W} \arrow[d, "B_W"] \\
\mathbb{F}^n \arrow[r, "M_{B_V B_W}(F)"'] & \mathbb{F}^m
\end{tikzcd}$$

$F:$

M

$M \; v$

$M \cdot M \qquad F_M \circ F_M$

$\alpha \quad + \qquad \alpha \quad +$

$$M_{B_V B_W}(F)(v)_{B_W} = \underline{(Fv)_{B_W}}$$

1° $v \leftarrow$ jeden z wektorów z B_V

v_i

$$(v_i)_{B_V} = \vec{E_i}$$

L: $M_{B_V B_W}(F) \cdot \vec{E_i} \leftarrow$ i-ta kol. $M_{B_V B_W}(F)$

$$(Fv)_{B_W} = P$$

2° $v \leftarrow$ dowolne

$$\vec{v} = \sum \alpha_i \vec{v_i} \qquad (v)_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

L: $M_{B_V B_W}(F) \cdot (v)_{B_V}$

$$= M_{B_V B_W}(F) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\mathbb{F}^n} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i M_{B_V B_W}(F) \cdot \underbrace{(\vec{E_i})}_{(v_i)_{B_V}}$$

$$\sum \alpha_i \cdot \vec{E_i} \qquad (v_i)_{B_V}$$

$$= \sum \alpha_i \Big(\underbrace{M_{B_V B_W}(F)(v_i)_{B_V}}_{(F(v_i))_{B_W}} \Big)$$

$$= \sum \alpha_i \cdot (F(v_i))_{B_W} = \Big(\sum_i \alpha_i F(v_i)\Big)_{B_W} = \Big(F\big(\sum_i \alpha_i v_i\big)\Big)_{B_W} = (F(v))_{B_W}$$

Rozumowanie to przenosi się na macierze oraz na iloczyn macierzy, który odpowiada składaniu przekształceń liniowych.

Lemat 5.4. *Niech $\mathbb{V}, \mathbb{V}', \mathbb{V}''$ będą przestrzeniami liniowymi o bazach B, B', B'', zaś $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, $F' : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$ przekształceniami liniowymi. Wtedy*

$$M_{BB''}(F'F) = M_{B'B''}(F') \cdot M_{BB'}(F).$$

$$\underset{B}{V} \xrightarrow[F]{} \underset{B'}{V'} \xrightarrow[F']{} \underset{B''}{V''}$$

$M \quad M'$

$F' \circ F \quad M' M$

$M_{BB'}(F)$

$M_{B'B''}(F')$

$M_{BB''}(F' \circ F)$

Macierze $\quad \forall_i \; AE_i = BE_i$

$$M_{BB''}(F'F)\, \underline{E_i} \overset{?}{=} M_{B'B''}(F')\, M_{BB'}(F) E_i$$

$$M_{BB''}(F'F)\, E_i = M_{BB''}(F'F)(v_i)_B = \big((F' \circ F)(v_i)\big)_{B''}$$

$$M_{B'B''}(F')\, M_{BB'}(F) E_i = M_{B'B''}(F') \cdot \underbrace{M_{BB'}(F)(v_i)_B}_{(Fv_i)_{B'}} = M_{B'B''}(F') \cdot \underline{\underline{(Fv_i)_{B'}}} = \big(F'(F(v_i))\big)_{B''} = \big((F' \circ F)(v_i)\big)_{B''}$$

Lemat 5.5. *Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym zaś $B_{\mathbb{V}}, B_W$ dowolnymi bazami $\mathbb{V}$ oraz W. Wtedy*

$$\mathrm{rk}(F) = \mathrm{rk}(M_{B_{\mathbb{V}}B_W}(F))$$

$L\cancel{F} : F^n \to F^m \qquad L_M = L$

$$\mathrm{rk}(L) = \mathrm{rk}(M)$$

$\mathrm{rk}(L) = \dim \mathrm{Im} L$, $\mathrm{rk}(M) =$ liczba niez lin. kol.

~~dim~~ $\mathrm{rk}(F) = \dim \mathrm{Im} F$

$v_1, \dots, v_n \leftarrow$ baza

$F(v_1) \dots F(v_n)$ generują obraz.

$\mathrm{rk}(F) = \dim(\mathrm{LIN}(F(v_1) \dots F(v_n)))$

= liczba lin. niez. wektorów spośród $F(v_1), \dots F(v_n)$

= liczba lin. niez. wektorów spośród $(F(v_1))_{B_W}$ $(F(v_2))_{B_W} \dots (F(v_n))_{B_W}$

kolumny macierzy $M_{B_V B_W}(F)$

$= \mathrm{rk}(M_{B'B''}(F))$

5.2 Macierz zmiany bazy

Jedną z rzeczy, którą możemy w ten sposób wyrazić, jest macierz zmiany bazy: chcemy mieć w miarę jednolity sposób na przejścia z macierzy w jednej bazie do macierzy w innej bazie.

Definicja 5.6 (Macierz zmiany bazy)**.** Dla baz B, B' przestrzeni wektorowej $\mathbb{V}$ *macierz zmiany bazy między* B *a* B' $M_{BB'}$ to macierz $M_{BB'}(\mathrm{Id})$.

Lemat 5.7. *Dla baz* B' *oraz* $B = v_1, \ldots, v_n$ *macierz zmiany bazy zadana jest jako*

$$M_{BB'} = [(v_1)_{B'}|(v_2)_{B'}|\cdots|(v_n)_{B'}] \ .$$

$$M_{BB'}(\mathrm{Id}) = \left[(v_1)_{B'} \,\middle|\, (v_2)_{B'} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, (v_n)_{B'} \right]$$

Lemat 5.8. *Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym, $B_{\mathbb{V}}, B'_{\mathbb{V}}$ bazami $\mathbb{V}$ zaś B_W, B'_W bazami W. Wtedy*

$$M_{B_{\mathbb{V}}B_W}(F) = M_{B'_W B_W} M_{B'_{\mathbb{V}} B'_W}(F) M_{B_{\mathbb{V}} B'_{\mathbb{V}}}.$$

W szczególności dla dwóch ustalonych baz B, B' danej przestrzeni mamy

$$M_{BB'} M_{B'B} = \mathrm{Id},$$

tzn. są to macierze odwrotne.

V

$B \quad B'$

$Id = M_{BB'} M_{B'B}$

$F : V \to W$

$B_V \qquad B_W$

$$B_{V'} \xrightarrow{M_{B_V B_W}(F)} B_{W'}$$

$M_{B' B_{W'}}(F)$

$$\underbrace{M_{B_{W'} B_W}(Id) M_{B_{V'} B_{W'}}(F) M_{B_V B_{V'}}(Id)}_{M_{B_V B_{W'}}(F \circ Id)}$$

$= M_{B_V B_W}(Id \circ F \circ Id) = M_{B_V B_W}(F)$

$M_{B_V B_V}(F)$

$M_{B_{V'} B_{V'}}(F)$

$$V \longrightarrow V$$

$B_V \qquad B_V$

$B_{V'} \qquad B_{V'}$

$$M_{BB'}(Id)\, M_{B'B}(Id) = M_{B'B'}(Id \circ Id)$$
$$= M_{B'B'}(Id)$$

B' b_1 $b_2 \ldots b_n$

$$M_{B'B'}(Id) = \Big[\big((b_1) \big)_B \;\Big|\; (b_2)_B \;\Big|\; \ldots \Big]$$

$\nearrow$ E_1 $\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}$ $\nearrow$ E_2 $\ldots$

$$= \big[E_1 \,|\, E_2 \,|\, \ldots \,|\, E_n \big]$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & & \ddots 1 \end{bmatrix} = Id$$

Uwaga. Najczęściej będziemy zajmować się przypadkiem, gdy $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ i $B_{\mathbb{V}} = B_W$ i $B'_{\mathbb{V}} = B'_W$.

Przykład 5.9. W $\mathbb{R}^3$ rozpatrzmy bazę standardową E oraz bazę B: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \qquad (E_1)_B$

$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$

Wtedy

$(b_1)_E (b_2)_E (b_3)_E$

$$M_{BE} = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}, M_{EB} = \begin{bmatrix}0,5&0,5&-0,5\\0,5&-0,5&0,5\\-0,5&0,5&0,5\end{bmatrix}$$

$M_{BB}(Id) = (v_1)_B, (v_2)_B, \dots, (v_n)_B$

$B = v_1 \dots v_n$

Można łatwo sprawdzić, że

$$M_{EB}M_{BE} = \mathrm{Id}$$

Rozpatrzmy przekształcenie F, (wyrażone w bazie standardowej) jako

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$M_{EE}(F) = \begin{bmatrix}4&0&0\\-1&5&1\\-1&1&5\end{bmatrix}$$

$M_{BB}(F)$

Wtedy

$$\begin{aligned} M_{BB}(F) &= M_{EB}M_{EE}(F)M_{BE} \\ &= \begin{bmatrix}0,5&0,5&-0,5\\0,5&-0,5&0,5\\-0,5&0,5&0,5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\-1&5&1\\-1&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix}4&0&0\\-1&5&1\\-1&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\0\\4\end{bmatrix} = 4\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

$(F(b_2))_B = \begin{matrix}0\\4\\0\end{matrix}$

Oraz

$$\begin{aligned} M_{EE}(F) &= M_{BE}M_{BB}(F)M_{EB} \\ &= \begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,5&0,5&-0,5\\0,5&-0,5&0,5\\-0,5&0,5&0,5\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}4&0&0\\-1&5&1\\-1&1&5\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

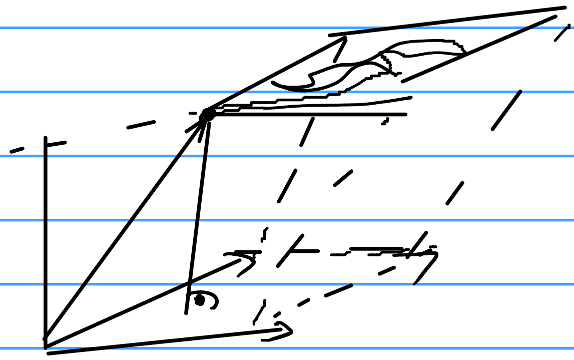
~~Możemy sprawdzić, że przykładowo~~

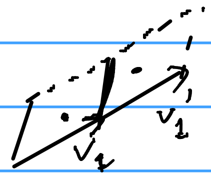
$$\cancel{\begin{bmatrix}4&0&0\\-1&5&1\\-1&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&4&0\\4&0&6\\0&4&6\end{bmatrix}}$$

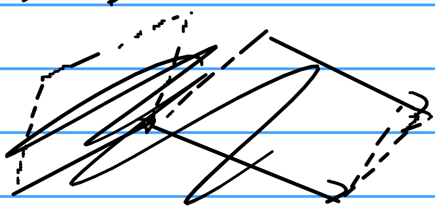
$M_{BB} = M_{B}^2 \quad M_{B^2} \quad ?$

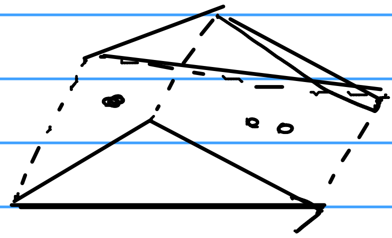
$M_{BB}(Id) = Id \quad ME$

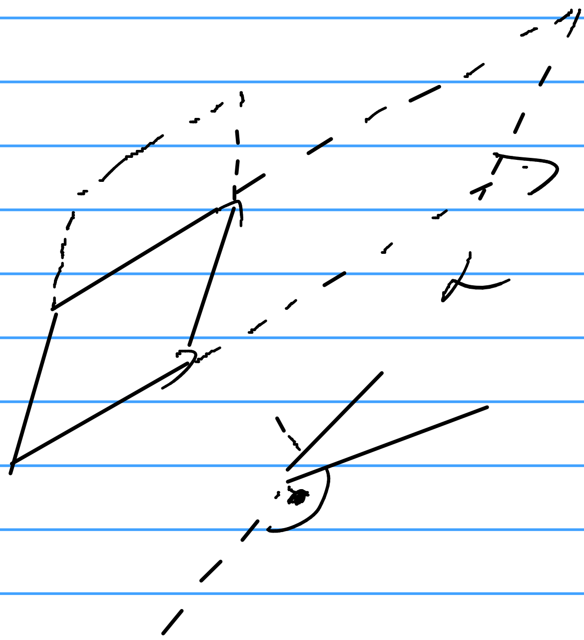
$= (Id(v_i))_B = E_i$




v1
v2

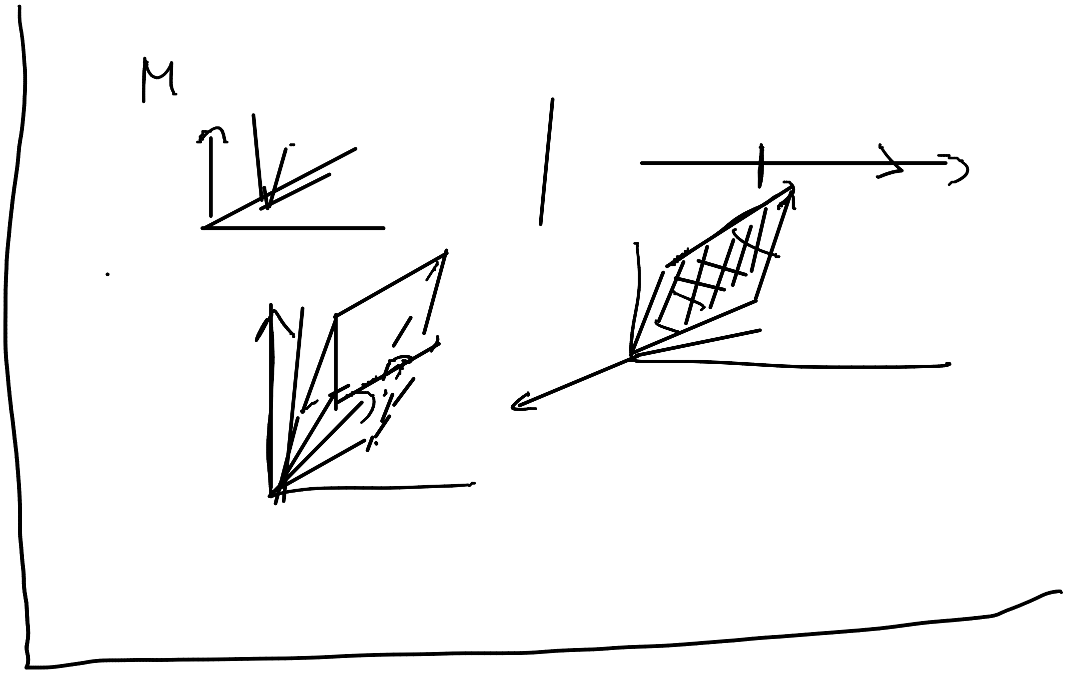





α

Rozdział 6

Wyznacznik



6.1 Wyznacznik

Ważna funkcja na macierzach: *wyznacznik*. Uogólnienie objętości (ale ze znakiem).

Jakie własności powinna mieć objętość na zbiorze n wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n$ z $\mathbb{F}$ w $\mathbb{F}$? (det : $(\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$):

$\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ $\det(M)$ $M = [v_1 | \ldots | v_n]$

$v_1 \in \mathbb{F}^n$

(W1) (liniowość) jest funkcją wielo-liniową, tj. liniową dla każdej kolumny:

$$\det(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, \alpha v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \alpha \det(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$
$$\det(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n) = \det(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) + \det(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

W szczególności

$$\det(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, \vec{0}, v_{i+1}, \ldots, v_n) = 0$$

(W2) zastąpienie v_i przez $v_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j v_j$ nie powinno zmieniać wartości

$$\det(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \det(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

(W3) zamiana kolejności dwóch wektorów zmienia znak (objętość ze znakiem)

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = -\det(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1} \ldots, v_n)$$

(W4) na macierzy identycznościowej to jest 1

$$\det(\mathrm{Id}) = 1$$

$\det(E_1, E_2, \ldots, E_n) = 1$

Jest to tak zwana „aksjomatyczna definicja wyznacznika”.

Lemat 6.1. *Jest dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki W1–W4.*

Istnienie → potem wprost

• W1–W4 Eliminacja Gaussa:

$v_1, \ldots, v_n \xrightarrow{\text{El. Gaussa}}$ det = 0

$= 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot$ = 90 · 1

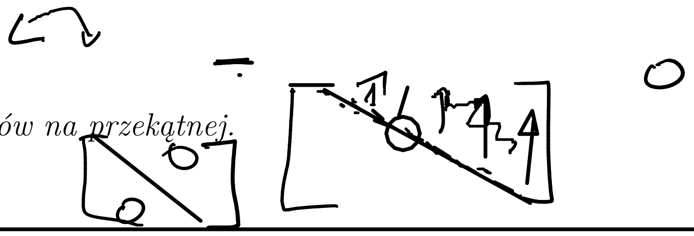
Definicja 6.2 (Wyznacznik)**.** *Wyznacznik* macierzy kwadratowej $\det(A) = |A|$. To jedyna funkcja spełniająca warunki W1–W4. Oznaczamy go też przez przez $|A|$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

6.2 Własności i metody obliczania wyznacznika

Fakt 6.3. *Proste własności wyznacznika*

- *Jeśli* $v_i = v_j$ *to* $\det(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$.
- *Dla macierzy trójkątnej jest to iloczyn elementów na przekątnej.*
- $\det(A) \neq 0 \iff \overset{rk}{\cancel{\dim}}(A) = n$



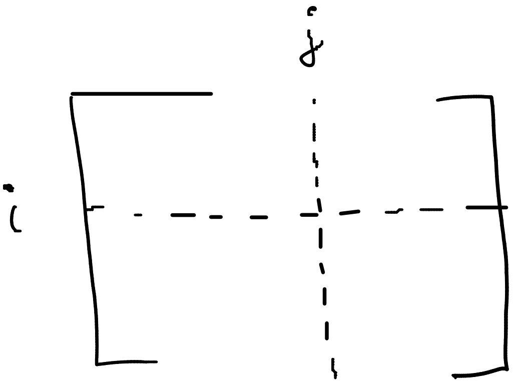
Definicja 6.4 (Minor macierzy)**.** *Minorem macierzy* M nazywamy każdą macierz uzyskaną poprzez usunięcie z M pewnego zbioru wierszy i kolumn.

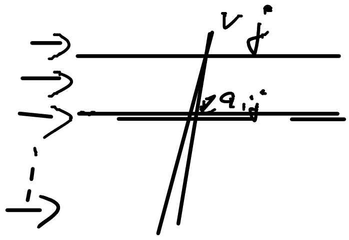
Zwyczajowo $A_{i,j}$ to macierz powstała z A poprzez usunięcie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Definicja 6.5 (Dopełnienie algebraiczne)**.** Dopełnienie algebraiczne elementu $a_{i,j}$ to $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$.

Fakt 6.6 (Rozwinięcie Laplace'a)**.** *Dla macierzy kwadratowej* $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ *mamy:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j})$$





A $\quad A_{i,j}$

minor $\quad (-1)^{i+j} \quad A_{i,j}$

$n \times n \rightarrow n \quad (n-1) \times n-1$

$n!$

$\downarrow \quad j = 1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & \\ 1 \to & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \; 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{array}{c|ccccccc|} & & & & j & & & \\ & a_{12} & \cdots & & 0 & \cdots & & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & & 0 & \cdots & & a_{2n} \\ i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{n2} & \cdots & & 0 & \cdots & & a_{nn} \end{array}$$

$$\sum_{i} (-1)^{i+1} a_{i1} \left| A_{i1} \right|$$

Rozwinięcie Laplace'a pozwala nam na podanie konkretnych wzorów na wyznacznik macierzy 2×2 oraz 3×3.

Przykład 6.7 (Obliczanie małych wyznaczników). Łatwo obliczyć, że wyznacznik macierzy 2×2, zadanej jako $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ to

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \ .$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$a \cdot (-1)^{1+1} \cdot |[d]|$$
$$+ c \cdot (-1)^{2+1} \cdot |[b]|$$
$$= ad + (-1) \cdot bc$$
$$= ad - bc$$

W przypadku macierzy 3×3 możemy zastosować metodę Sarrusa.

3x3

6

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & + & + & + & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & - & - & - & & \end{array}$$

1 2 1 1 2
2 0 2 2 0
1 -1 2 1 -1
$= 4 - 2 + 2 - 8 = -4$

Twierdzenie 6.8 (Cauchy).

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \ .$$

Dowód. Teza łatwo zachodzi, jeśli $|A| = 0$ lub $|B| = 0$: odpowiada to sytuacji, w której $\operatorname{rk}(A) < n$ lub $\operatorname{rk}(B) < n$. A wtedy też $\operatorname{rk}(AB) \le \min(\operatorname{rk}(A), \operatorname{rk}(B)) < n$. Czyli $|AB| = 0$.

W dalszym dowodzie możemy zakładać, że macierze są rzędu n. W takim razie zgodnie z Lematem 4.34 B można przedstawić jako iloczyn macierzy elementarnych.

Pokażemy najpierw, że

$$|AB| = |A| \cdot |B| \ ,$$

gdzie B jest macierzą elementarną.

- Macierz T_{ij}: przez zamianę i-tej i j-tej kolumny dostajemy Id, czyli jej wyznacznik to -1. Jednocześnie przemnożenie A przez T_{ij} zamienia miejscami 2 kolumny, czyli zmienia znak wyznacznika na przeciwny.
- Macierz $\mathrm{Id} + \alpha 1_{ij}$. Przemnożenie przez tą macierz dodaje wielokrotność kolumny do innej kolumny, czyli zgodnie z definicją nie zmienia wartości wyznacznika.

  Jednocześnie w $\mathrm{Id} + \alpha 1_{ij}$ dodając do j-tej kolumny α razy i-tą usuwamy niezerowy element poza przekątną, otrzymując Id. Czyli $|\mathrm{Id} + \alpha 1_{ij}| = 1$.
- Macierz $D_{i\alpha}$ przemnaża i-tą kolumnę α razy, jednocześnie $|D_{i\alpha}| = \alpha$.

Ale to jest proste, bo odpowiada to operacji elementarnej (kolumnowe) na macierzy A.

Wracając do dowodu. Przez indukcję łatwo stwierdzamy, że dla dowolnej A mamy

$$\left| A \prod_i E_i \right| = |A| \prod_i |E_i| \ ,$$

gdzie każda z E_i jest macierzą elementarną. Podstawiając $A \leftarrow \mathrm{Id}$ oraz $B = \prod_i E_i$ dostajemy

$$\left| \mathrm{Id} \prod_i E_i \right| = |\mathrm{Id}| \prod_i |E_i| \ .$$

Lewa strona to $|B|$ a prawa $\prod_i |E_i|$, czyli wracając do głównej równości:

$$\begin{aligned} |AB| &= \left| A \prod_i E_i \right| \\ &= |A| \prod_i |E_i| \\ &= |A||B| \ . \end{aligned}$$

□

~~Cauchy~~ Cauchy

Tw $\cancel{A}$ A, B $n \times n$

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B| = |B|\cdot|A| = |B\cdot A|$$

1) $rk(A) < n$ $\det(A)=0$

$$rk(AB) \leq rk(A)$$

$$\det(AB) = 0$$

2) $rk(A) = rk(B) = n$ $rk(AB) = n$

$A = \prod_i E_i$ $E_i \leftarrow$ elementarne.

$$T_{ij} \quad \begin{array}{c|c} & \\ i & \\ j & \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Id + \alpha 1_{ij} \begin{bmatrix} 1 & & \alpha & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{i\alpha} \quad i \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$|T_{ij}| = -|Id| = -1$ $|D_{i\alpha}| = \alpha\cdot|Id| = \alpha$ $|Id + \alpha 1_{ij}| = \underline{1}$