Bezpośredni rachunek

Zadanie 1

Niech $q_1, q_2, \ldots, q_n$ będą dowolnymi liczbami. Macierz $(n \times n)$ Vandermonde'a V_n ma wyrazy równe $v_{ij} = q_i^{j-1}$, tj.:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \ldots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \ldots & q_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \ldots & q_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Udowodnij, że

$$\det(V_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (q_j - q_i).$$

W szczególności pokaż, że jeśli q_i są niezerowe i parami różne, to wyznacznik ten jest niezerowy.

Dowód. Najpierw odejmujemy pierwszy rząd od każdego kolejnego, dostając

$$\begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \ldots & q_1^{n-1} \\ 0 & q_2 - q_1 & q_2^2 - q_1^2 & \ldots & q_2^{n-1} - q_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_n - q_1 & q_n^2 - q_1^2 & \ldots & q_n^{n-1} - q_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Teraz od i+1 kolumny odejmujemy q_1 razy i-ta, zaczynajac od prawej strony (czyli eliminacja niezerowych elementów w górnym wierszu)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 - q_1 & q_2^2 - q_1^2 - q_1(q_2 - q_1) & \ldots & q_2^{n-1} - q_1^{n-1} - q_1(q_2^{n-2} - q_1^{n-2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_n - q_1 & q_n^2 - q_1^2 - q_1(q_n - q_1) & \ldots & q_n^{n-1} - q_1^{n-1} - q_1(q_n^{n-2} - q_1^{n-2}) \end{vmatrix}.$$

Po rozwinięciu odpowiednie wyrazy skracają się i dostajemy

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 - q_1 & q_2^2 - q_1 q_2 & \ldots & q_2^{n-1} - q_1 q_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_n - q_1 & q_n^2 - q_1 q_n & \ldots & q_n^{n-1} - q_1 q_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (q_2 - q_1) \cdot 1 & (q_2 - q_1) \cdot q_2 & \ldots & (q_2 - q_1) \cdot q_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (q_n - q_1) \cdot 1 & (q_n - q_1) \cdot q_n & \ldots & (q_n - q_1) \cdot q_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Teraz z liniowości wyjmujemy przed wyznacznik $(q_2 - q_1) \cdots (q_n - q_1)$ i dostajemy

$$\prod_{i=2}^{n} (q_i - q_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & q_2 & \ldots & q_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & q_n & \ldots & q_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

i teraz przez indukcję. $\square$