WYKŁAD 7.

Wartości własne, wektory własne.

M - kwadratowa

$\vec{v} \neq \vec{0}$

$M\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ $\qquad \lambda$ - wart. wł. M

$\vec{v}$ - wektor wł. dla wart. wł λ

L - pr. lin. $F^n \to F^n$

$LV = \lambda \cdot V$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4 - wart. wł.

$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$ wekt. wł dla 4

$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ — // —

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

6 - wart. wł.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ - wekt. wł. 6

$L_A(v) = Av$

$4 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$M_{BB}(L)$ $\qquad 4, 6 \qquad 6 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0, & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

$$M_{BB}(L) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M_{B'B'}(L) = M_{BB'} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{M_{BB}(L)} M_{B'B}$$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ obrót o $90°$ w lewo

nie ma wart. wł. rzecz.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$i, -i$

8.2 Macierze podobne

$A^{-1} M A$

Przedstawienie macierzy M w postaci $A^{-1}NA$ gdzie A to macierz zmiany bazy ma dla nas na razie sens tylko w przypadku przekształceń liniowych. Ale ta własność jest jakoś pomocna również bez rozważania konkretnych baz i zmian baz.

Definicja 8.5 (Macierze podobne). Macierze kwadratowe A, B są *podobne*, jeśli istnieje macierz odwracalna C, taka że

$$A = C^{-1}BC\ .$$

$A = C^{-1}BC$

$B = CAC^{-1}$

Oznaczamy to jako $A \sim B$.

Lemat 8.6. *Rozpatrzmy macierz odwracalną $A = [A_1|A_2|\cdots|A_n]$. Jest to macierz zmiany bazy między bazą $B = A_1, \ldots, A_n$ oraz bazą standardową E :*

$$A = M_{BE}\ .$$

$M_{BE} = [(B_1)_E | (B_2)_E | \cdots |]$

$A^{-1} = M_{EB}$

W szczególności, dla macierzy kwadratowej M oraz jej macierzy podobnej $M' = A^{-1}MA$ mamy

$A^{-1}\ M\ A$

$$M' = M_{EB}MM_{BE}\ .$$

$F_M(\vec{v}) = M\vec{v}$

Oznacza to, że dla przekształcenia liniowego F_M indukowanego przez M macierz M' jest macierzą tego przekształcenia w bazie B.

$M_{EE}(F_M)$

$$M' = M_{EB}(F_M)M_{BE} = M_{BB}(F_M)\ .$$

$V \to$ wekt. wł λ M

$MV = \lambda V$

$M' = A^{-1} M A$

$A^{-1}MA(A^{-1}V) = A^{-1}M\vec{v} = \lambda\cdot(A^{-1}\vec{v})$

Fakt 8.7. *Macierze podobne mają te same wartości własne.*

$M \sim M'$

$M = M_{EE}(F_M)$

$M' = M_{BB}(F_M)$

$M \quad \lambda$

$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $n+1$

8.3 Wielomian charakterystyczny

Lemat 8.8. *λ jest wartością własną macierzy M* $\iff$ $\det(M - \lambda \mathrm{Id}) = 0$

λ - wart wł. $M \iff \exists\ \vec{v} \neq \vec{0}\ M\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$\iff \exists\ \vec{v} \neq \vec{0}\ M\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0} \iff \exists\ \vec{v} \neq \vec{0}\ (M - \lambda \mathrm{Id})\vec{v} = \vec{0}$

$\iff \exists\ \vec{v} \neq \vec{0}\quad \vec{v} \in \ker(M - \lambda \mathrm{Id})$

$\iff \ker(M - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{\vec{0}\}$

$\iff$ $M - \lambda \mathrm{Id}$ nie jest odwracalna

$\iff \det(M - \lambda \mathrm{Id}) = 0$

Definicja 8.9 (Wielomian charakterystyczny)**.** *Wielomian charakterystyczny* macierzy kwadratowej to: A $\det(A - x\,\mathrm{Id})$

$$\varphi_{A}(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}) .$$

Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego $F : V \to V$ to

$$\varphi_F(x) = \det(M_{BB}(F) - x\,\mathrm{Id}) \ ,$$

dla dowolnej bazy B przestrzeni $\mathbb{V}$.

Lemat 8.10. dow. *Wielomian charakterystyczny dla macierzy $n \times n$ jest wielomianem stopnia n.*

λ jest wartością własną macierzy M wtedy i tylko wtedy gdy jest pierwiastkiem φ_M.

- λ - wart. wł. $\iff \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0 \iff \varphi_A(\lambda) = 0$

$\varphi_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id})$

$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id})$

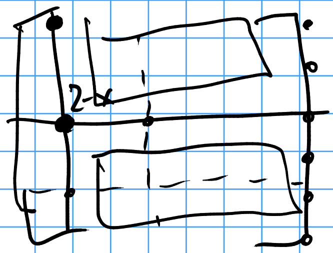
$\varphi_A(x)$ - wielomian st n.

$\det(A - x\,\mathrm{Id})$

- rozwinięcie Laplace'a $\begin{bmatrix} 2-x & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix}$

φ_A - wiel st. n $\qquad n\times n$

- jeśli macierz A ma w każdej kol. i wierszu najwyżej jeden el. zależny liniowo od x, to $\det(A)$ to wiel. stopnia $\leq n$
- jeśli powyżej w każdym wierszu i kol. ~~jest~~ jest dokł. jeden el. zależny liniowo od x, to wielomian $\varphi_A(x)$ ma st. dokł n.



$[a-x]$

$$\det(A) = \sum_i \underbrace{(-1)^{1+i}} \underbrace{\overset{\leq 1}{a_{i1}}} \underbrace{\overset{\leq n-1}{\det A_{i1}}}$$

- $\leq$ jeden z zależy od x

wielomian st $< n$ wiel. $\leq n-1$

- druga część

$$\sum (-1)^{i+1} \underline{a_{i1}} \quad \det A_{i1}$$

$\leq n-1$

jeden zależy od x $\qquad$ st 0 $\qquad n-1$

$n-1$ $\qquad$ st $\leq n-1$

1 $\qquad$ st $= n$

Lemat 8.11. *Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego jest dobrze zdefiniowany.*

$$\varphi_F(x) = \det(M_{BB}(F) - x\,Id)$$

$$|M_{B'B'}(F) - x\,Id| = |M_{BB}(F) - x\,Id|$$

$$|M_{BB}(F)| = |M_{B'B'}(F)|$$

$$\| \; | M_{B'B} (M_{B'B'}(F) - x\,Id) M_{BB'} |$$

$$\| \; \cancel{|M_{B'B}|} \cdot | \quad | \cdot \cancel{|M_{BB'}|}$$

$$| \underbrace{M_{B'B} M_{B'B'}(F) M_{BB'}}_{M_{BB}(F)} - x\,Id | = | M_{BB}(F) - x\,Id |$$

Przykład 8.12 (Kontunuacja Przykładu 8.4). Przypomnijmy, że obrót $\mathbb{R}$ [2] o kąt 90^0 (w lewo). Jak wygląda macierz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 0-x & -1 \\ 1 & 0-x \end{vmatrix} = x^2+1 \quad \Leftarrow \text{ nie ma zer rzecz!}$$

$i, -i$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad -y = ix$$

Przykład 8.13 (Kontynuacje Przykładu 8.3). Obliczmy wartości własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

4, 4, 6

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-x & 0 & 0 \\ -1 & 5-x & 1 \\ -1 & 1 & 5-x \end{vmatrix} = (4-x)\begin{vmatrix} 5-x & 1 \\ 1 & 5-x \end{vmatrix}$$

$$= (4-x)\left((5-x)^2-1\right)$$

$$= (4-x)(4-x)(6-x)$$

4

6

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

8.4 Krotności: algebraiczna i geometryczna.

Lemat 8.14. *Jeśli λ jest wartością własną dla M, to zbiór wektorów własnych dla M to $\ker(M - \lambda\,\mathrm{Id})$. W szczególności jest to przestrzeń liniowa.*

Uwaga. Formalnie wektor $\vec{0}$ nie jest wektorem własnym, ale wygodniej jest go zaliczyć tu do wektorów własnych, żeby wyszła podprzestrzeń.

$\{\vec{V} : M\vec{V} = \lambda\vec{V}\}$ ← przestrzeń liniowa

$\{\vec{V} : (M - \lambda Id)\vec{V} = \vec{0}\} = \ker(M - \lambda Id)$

$\mathbb{V}_\lambda$

$\lambda \leftarrow$ ustalone $\quad \mathbb{V}_\lambda = \ker(M - \lambda Id)$

Oznaczenie: dla ustalonej macierzy M oznaczamy

$$\mathbb{V}_\lambda = \{\vec{V} \;:\; M\vec{V} = \lambda\vec{V}\} \ .$$

Analogicznie dla przekształceń liniowych.

Tym samym, aby obliczyć wektory własne należy najpierw policzyć wielomian charakterystyczny, jego pierwiastki i dla ustalonego pierwiastka λ policzyć $\ker(M - \lambda\,\mathrm{Id})$. Można też oczywiście bezpośrednio próbować rozwiaząć równanie

$$\underline{MX = \lambda X}$$

w zmiennych $x_1, \ldots, x_n$.

$\dim(\ker(M - \lambda Id))$

Definicja 8.15 (Krotność algebraiczna, krotność geometryczna)**.** Dla wartości własnej λ *krotność geometryczna* to wymiar przestrzeni wektorów własnych dla λ, zaś *krotność algebraiczna* to krotność pierwiastka λ w wielomianie charakterystycznym.

Fakt 8.16. *Krotność geometryczna λ dla M to wymiar $\ker(M - \lambda\,\mathrm{Id})$.*

Lemat 8.17. *Krotność algebraiczna jest większa równa krotności geometrycznej.*

M ← macierz

λ - wart. wł. kr. geom. k

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ ← niezależne

$$M v_i = \lambda v_i \qquad i = 1 \ldots k$$

$$L = L_M : F^n \to F^n$$

$v_1, \ldots, v_k$ ← wekt. wł L dla λ

$B = v_1, \ldots, v_k, \ldots$ ← baza

$$M_{BB}(L) = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & ? \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right]$$

$(L v_1)_B$

$(\lambda v_1)_B = \begin{matrix}\lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{matrix}$

$$\left|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline & B \end{array}\right| = |A| \cdot |B|$$

$$\varphi_M(x) = \varphi_L(x) = $$

$$= |M_{BB}(L) - x\,Id| = \left|\begin{array}{ccc|c} \lambda - x & & & \\ & \lambda - x & & ? \\ & & \ddots\ \lambda - x & \\ \hline & 0 & & \end{array}\right| = \underbrace{(\lambda - x)^k \cdot |\ldots|}$$

with the first k columns marked k.

Uwaga. Jeśli krotność algebraiczna wynosi 1, to geometryczna też: nie może wynosić więcej, jednocześnie jeśli krotność algebraiczna λ wynosi 1 to $\det(M - \lambda \operatorname{Id}) = 0$, czyli λ jet wartością własną, czyli ma krotność geometryczną przynajmniej 1.

Przykład 8.18. $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ma dwie wartości własne: 1 oraz 2. Krotność algebraiczna 2 to 2, ale geometryczna to 1: macierz $M - 2\operatorname{Id} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ma rząd 2, więc wymiar jej jądra = wymiar przestrzeni wektorów własnych dla 2 to 1.

$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$1-x$ $2-x$ $2-x$ $= (1-x)(2-x)^2$

1 1
2 2

Przykład 8.19. Przypomnijmy Przykład 5.10 i macierz

4 2-kr.
6 1-kr.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ rk 2, dim ker = 1

1

Ta macierz ma dwie wartości własne: 6, wymiar przestrzeni $\mathbb{V}_6$ to 1 (rozpięta przez wektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$), oraz 4, wymiar przestrzeni $\mathbb{V}_4$ to 2 (niezależne wektory własne to np. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$).

W dalszej części będziemy pytać o to, ile wektorów własnych istnieje i czy może można z nich utworzyć bazę.

8.5 Przestrzenie niezmiennicze

$v \in V_\lambda$ $\quad M v = \lambda \cdot v \in V_\lambda$

Definicja 8.20 (Przestrzeń niezmiennicza)**.** Podprzestrzeń $V' \leq \mathbb{V}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ jest *przestrzenią niezmienniczą* dla $F : V \to V$, jeśli $F(V') \subseteq \mathbb{V}'$.

Lemat 8.21. *Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ będą różnymi wartościami własnymi macierzy M. Wtedy suma (mnogościowa) bez przestrzeni $\mathbb{V}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbb{V}_{\lambda_k}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.*

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

V_{λ_1} V_{λ_2} ... V_{λ_k}
B_{λ_1} B_{λ_2} B_{λ_k} $\bigcup B_{\lambda_i}$
niez.

8.6 Macierze diagonalizowalne, przekształcenia diagonalne

Definicja 8.22 (Macierz diagonalizowalna, przekształcenie diagonalne)**.** Macierz M jest *diagonalizowalna* $\iff$ jest podobna do macierz przekątniowej.

Przekształcenie liniowe jest *diagonalne*, jeśli jego macierz (w jakiejś bazie) jest diagonalizowalna.

$a_{11} \leftarrow$ wart. wł.
a_{22} ...

$M = A^{-1} D A$ $\quad M^k = A^{-1} D^k A$

Lemat 8.23. *Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$:*

1. $M_{BB}(F)$ *jest diagonalizowalna w pewnej bazie B;* $M_{BB}(F) \sim D$
2. $M_{BB}(F)$ *jest diagonalizowalna w każdej bazie B;*
3. $M_{BB}(F)$ *jest diagonalna w pewnej bazie B.* $M_{BB}(F) = \cancel{D} \leftarrow$ przek.

$3 \Rightarrow 2$ $\quad M_{BB}(F) = D$

$$M_{B'B'}(F) = \underbrace{\underline{M_{BB'}}\ \overset{M_{BB}(F)}{D}\ \underline{M_{B'B}}}_{-1}$$

diagonalizowalna

$2 \Rightarrow 1$ jasne

$1 \Rightarrow 3$ $\quad M_{BB}(F) = \underbrace{A^{-1} D A}$

Chcemy B' $\quad M_{B'B'}(F) = D$

$$D = \underset{M_{BB'}}{A}\ M_{BB}(F)\ \underset{M_{B'B}}{A^{-1}}$$

$A = M_{BB'}$

dana szukany

$$D = M_{BB'}\ M_{BB}(F)\ M_{B'B} = M_{B'B'}(F)$$

$$A^{-1} \overset{?}{=} M_{B'B} = \left[(b_1')_B \mid (b_2')_B \mid \cdots \right]$$

$B' = b_1', b_2', \ldots, b_n'$

$(b_i')_B \leftarrow$ i-ta kol A^{-1}

$M_{B'B} = A^{-1}$

$M_{BB'} = A$

Twierdzenie 8.24. *Następujące warunki są równoważne dla macierzy kwadratowej M rozmiaru $n \times n$:*

1. *M jest diagonalizowalna*
2. *M ma n niezależnych wektorów własnych*
3. *Suma wymiarów przestrzeni wartości własnych $\mathbb{V}_\lambda$ macierzy M wynosi n.*

Analogiczne twierdzenie zachodzi też dla przekształceń liniowych.

Dowód nieobowiązkowy, dla zainteresowanych.

$1 \Rightarrow$ $\quad M = A^{-1} D A \qquad A^{-1}_{i} \leftarrow$ wektory wł.

$$A A^{-1} = Id$$

$$A [A^{-1}_{1} | A_2^{-1} \ldots] = Id$$

$$A A_i^{-1} = E_i$$

$$M A_i^{-1} = A^{-1} D \underbrace{A A_i^{-1}}_{E_i} = A^{-1} d_{ii} E_i = d_{ii} A_i^{-1}$$

$2 \Rightarrow 3$ $\quad v_1 \, v_2 \ldots v_n$

$$v_1 \ldots v_{i_1} \quad v_{i_1+1}, \ldots v \quad \ldots v$$

V_{λ_1} $\quad \lambda_1, d_1 \qquad \lambda_2 \; d_2 \qquad \lambda_k \; d_k$

$$\sum d_i = n$$

$$\dim(V_{\lambda_i}) \geqslant d_i$$

$$n \geqslant \sum \dim(V_{\lambda_i}) \geqslant n$$

$3 \Rightarrow 1$ $\quad \sum d_i = n$

$B = v_1 \ldots v_n \leftarrow$ niezależne wektory wł.

F_M wyr. w bazie $v_1 \ldots v_n$

diag. $\qquad$ przek.

$M_{BB}(F_M) \quad \begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix} \qquad M_{E} = M_{BE} \, M_{BB}(F) \, M_{EB}$

8.7 Macierz Jordana

$\mathbb{C}$ $(\supseteq \mathbb{R})$

Zajmiemy się obecnie problemem, jak bardzo macierz może nie być diagonalizowalna. Zauważmy, że w przypadku liczb zespolonych każdy wielomian ma pierwiastek, w szczególności wielomian charakterystyczny każdej macierzy ma pierwiastek, czyli każda macierz zespolona ma wektor własny.

Definicja 8.25 (Klatka Jordana, macierz Jordana)**.** *Klatką Jordana* nazywamy macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \leftarrow$$

$\begin{matrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{matrix}$ $\quad \lambda$

$\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}$

Macierzą Jordana nazywamy macierz postaci

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

gdzie $J_1, J_2, \ldots, J_k$ są klatkami Jordana.

Ważne $\lambda \in \mathbb{C}$, tj. może być liczbą zespoloną.

Fakt 8.26. *Klatka Jordana J rozmiaru $k \times k$ ma jedną wartość własną: λ, o krotności algebraicznej k oraz geometrycznej 1.*

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie. Jest to w pewnym sensie najgorszy przypadek, jeśli chodzi o wartości własne.

Twierdzenie 8.27. *Każdą macierz M o wartościach w $\mathbb{C}$ można przedstawić w postaci*

$$M = A^{-1}JA$$

gdzie J jest macierzą Jordana a A jest macierzą odwracalną (o wartościach w $\mathbb{C}$).

Uwaga: różne klatki mogą być dla tej samej wartości λ.

Przykład/Zastosowanie 8.28. Przypomnijmy sobie macierz odpowiadającą rekurencji na liczny Fibonacciego.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$F^k \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{bmatrix}$

$f_0 = 1$
$f_1 = 1$

$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

F - symetryczne

$$F = A^{-1}\begin{bmatrix} \cdot & \\ & \cdot \end{bmatrix} A$$

$$\begin{vmatrix} 0-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x + x^2 - 1 = x^2 - x - 1$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$$

$$F = A^{-1}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \\ & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix} A$$

$$F^k = A^{-1}\begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^k & \\ & \left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^k \end{bmatrix} A$$

$$\nearrow \quad A^{-1} \quad \left[\, C_1 \mid C_2 \,\right]$$

C_1: wekt. wł $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ $\quad C_2 \quad \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$

$$M C_1 = A^{-1}\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} A\, C_1$$

$$C_2 = \qquad C_2$$

$$M C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} C_1 \qquad A^{-1}\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} A\, C_1$$

$C_1 \leftarrow$ 1- kol A^{-1}

$$A\, C_1 = E_1$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} C_1$$

$$F v = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} a \\ a^2 \end{bmatrix} = F\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\lambda = a$$

Dowolna zal. rel.

$$a_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i a_{n+i}$$

$$\Downarrow \quad A$$

$$A \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$A = B^{-1} J B$$

macierz Jordana

$$J^k \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}^k$$

Zauważmy też, że A oraz A^{-1} można łatwo policzyć: kolumny A^{-1} to wektory własne: niech C_1 to wektor własny dla $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ zaś C_2 dla $\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$. Zdefiniujmy $A^{-1} := [C_1|C_2]$. Aby pokazać, że jest to dobrze dobrane A i A^{-1}, wystarczy pokazać, że $A^{-1}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix} A$ oraz M są równe,

Używając macierzy Jordana możemy podać rozwiązanie ogólne dla każdej zależności tej postaci (tzn. rekurencji liniowej).

8.8 Macierze symetryczne

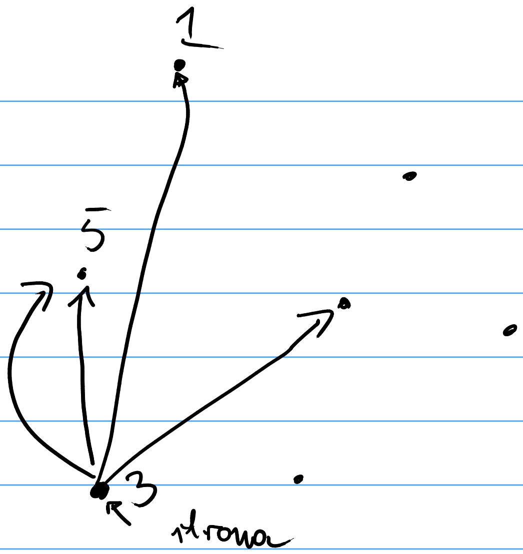
Twierdzenie 8.29. *Macierz symetryczna z $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ma n niezależnych wektorów własnych (nad $\mathbb{R}$).*

Diagonalizowalna.

$M \quad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$M = A^{-1} J A$

nad $\mathbb{C}$



$M \quad n \quad n$

$d_{ij} \leftarrow$ liczba kr z j do i

$d_{53} = 2$

$d_{13} = 1$

$m_3 = 4$

$M_{ij} \quad \dfrac{d_{ij}}{m_j}$

Rozdział 9

Oryginalny alg. Google'a

ranking

sł.-kluczowe

PageRank

Na podstawie pracy Kurt Bryan i Tanya Leise „The \$25,000,000,000 eigenvector. The linear algebra behind Google.” *SIAM Review*, 48:3 (2006) 569–581.

9.1 Macierze sąsiedztwa, ranking

Modelujemy internet jako graf: zbiór wierzchołków to strony, (skierowane) krawędzie to linki miedzy nimi (krawędź z i do j oznacza, że jest link ze strony i do j). Naszym celem jest skonstruowanie rankingu, tj. przypisanie każdej stronie jej “ważności” w sieci. Chcemy to robić na podstawie linków, każdemu przypisujemy sumę głosów 1. Zakładamy, że graf nie ma „pętli”, tzn. krawędzi z i do i.

Definicja 9.1 (Znormalizowana macierz sąsiedztwa)**.** Dla grafu G o wierzchołkach $1, 2, \dots, n$ niech $d_{i,j}$ oznacza liczbę krawędzi z j do i (może to być 0), zaś m_j liczbę krawędzi wychodzących z j $(= \sum_i d_{i,j})$.

Znormalizowana macierz sąsiedztwa $M(G)$ to macierz $(m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, gdzie

$$m_{i,j} = \frac{d_{i,j}}{m_j} .$$

Zauważmy, że liczby w kolumnie są nieujemne i jeśli istnieje choć jedna krawędź, to sumują się do 1. W dalszej części będziemy się zajmować grafami, które nie mają takich wierzchołków. Taką macierz nazywamy *macierzą stochastyczną*.

Definicja 9.2 (Macierz stochastyczna, wektor stochastyczny)**.** Wektor jest *stochastyczny*, jeśli jego współrzędne są nieujemne i sumują się do 1.

Macierz kwadratowa M jest *(kolumnowo) stochastyczna*, jeśli każda jej kolumna jest wektorem stochastycznym.

Fakt 9.3. *Iloczyn dwóch macierzy stochastycznych jest macierzą stochastyczną.*

Jeśli $M_1, \dots, M_k$ są macierzami stochastycznymi oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są liczbami nieujemnymi, spełniającymi $\sum_i \alpha_i = 1$, to

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i$$

też jest macierzą stochastyczną.

Prosty dowód pozostawiamy na ćwiczenia.

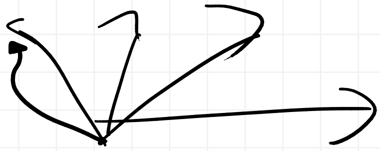
Potęgi znormalizowanej macierzy sąsiedztwa mają naturalną interpretację: wyraz i, j macierzy M^k jest niezerowy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje scieżka długości k w grafie sąsiedztwa z j do i. To stwierdzenie ma dokładniejszą, ilościową wersję:

G nie ma wierzch. bez kr. wych.

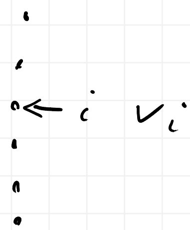
Lemat 9.4. *Niech M będzie znormalizowaną macierzą sąsiedztwa zaś $\vec{V}$ wektorem stochastycznym. Wtedy $\underline{M^k\vec{V}}$ to rozkład prawdopodobieństwa procesu losowego:*

krok 0 *W kroku* 0 *losujemy wierzchołek początkowy wg. rozkładu wyznaczonego przez $\vec{V}$, tj. wierzchołek i jest wylosowany z prawdopodobieństwem v_i.*

krok k *W każdym kolejnym kroku, jeśli jesteśmy w wierzchołku v, wybieramy z takim samym prawdopodobieństwem jedną z krawędzi wychodzących z v.*



$k=0$ $\vec{V}$

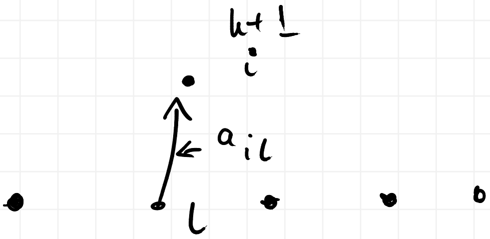


$k+1$ $M\,\underbrace{(M^k\vec{V})}_{W \text{ wektor stoch.}}$ rozkł. prawd. po k krokach

$$(M\cdot W)_i = \sum_{l=1}^{k} a_{il}\cdot w_l$$

prawd. tego, że będąc w l przejdziemy do i

prawd. tego, że jesteśmy w l



k krokach

$M^k v$

$k \nearrow \infty \quad M^k \cancel{v} \rightsquigarrow \vec{R}$

$M\vec{R} = \vec{R}$

Definicja 9.5. *Ranking* dla macierzy stochastycznej M to wektor $\vec{R}$, taki, że $M\vec{R} = \vec{R}$.

wektor wł. dla wart 1.

Rankingiem wierzchołka grafu jest odpowiadająca współrzędna tego wektora.

i R_i

Innymi słowy, jest to wektor własny dla wartości 1. Jest to też „stabilny" rozkład prawdopodobieństwa, w tym sensie, że odpowiada prawdopodobieństwu znalezienia się w danym wierzchołku po dużej liczbie kroków (ta intuicja niestety jest zawodna z paru powodów).

Zauważmy, że zamiast $\sum_i r_i = 1$ moglibyśmy wziąć dowolną inną liczbę niż 1, ale dla 1 to daje ładną interpretację probabilistyczną.

Chcielibyśmy, żeby ranking istniał, był jedyny oraz był nieujemny.

Lemat 9.6. *Macierz stochastyczna ma wartość własną* 1.

M, M^T ← te same wart. wł.

M – macierz kol. stoch. ma wart wł 1

M^T ma wart wł. 1 $\Longrightarrow$

$$M^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ - - - - - \\ \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow$$

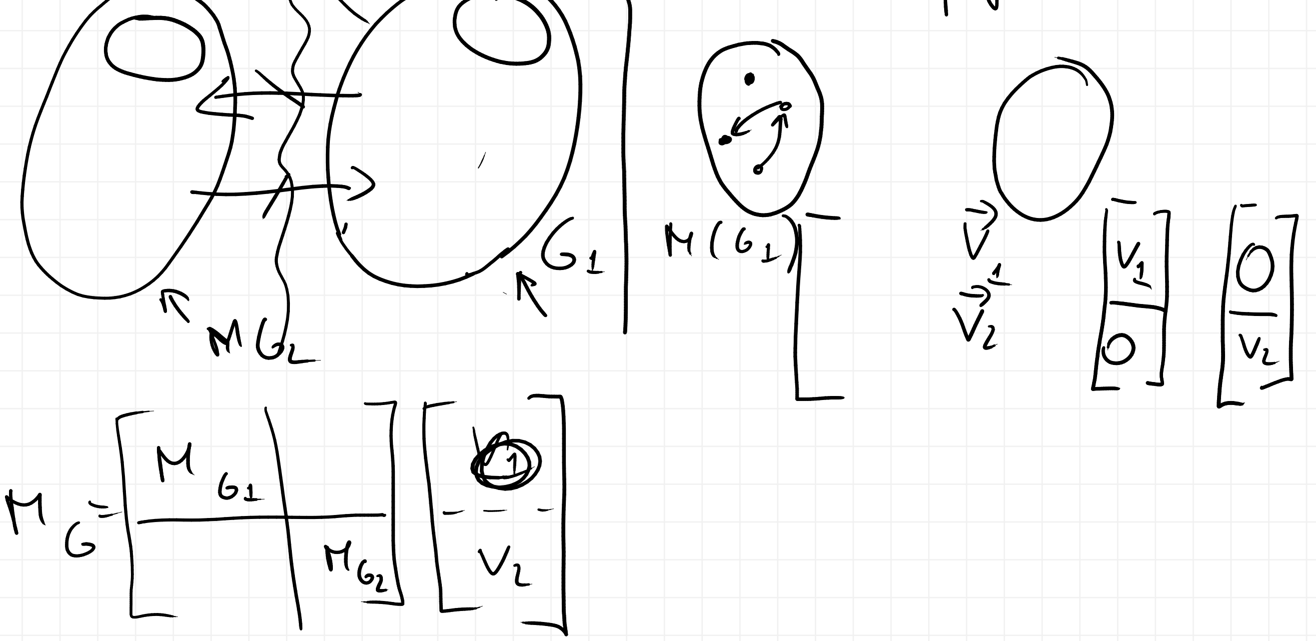
suma el. z i-tego wiersza M^T = suma el. z i-tej kol. $M = 1$

Fakt 9.7. *Jeśli w grafie, który nie ma wierzchołków bez wychodzących krawędzi, istnieją dwa różne podzbiory wierzchołków, z których nie ma krawędzi wychodzących, to ranking nie jest jedyny.*

Uwaga. W praktyce, graf internetu nie był spójny (teraz być może już jest).

Poza tym wiszące wierzchołki są problemem.

Silnie-spójne składowe



9.2 Macierze dodatnie, PageRank

Aby zapewnić te warunki, zajmiemy się inną macierzą: dla znormalizowanej macierzy sąsiedztwa M rozmiaru $n \times n$ oraz liczby $0 < m < 1$ definiujemy

$$M' = \underline{(1-m)}M + \underline{m} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

0,27...

Dla odpowiedniej wartości m ranking tej macierzy to PageRank.

Fakt 9.8. *Macierz M' jest macierzą stochastyczną.*

Macierz ta ma naturalną interpretację jako proces losowy: w każdym kroku z prawdopodobieństwem $1-m$ losujemy krawędź wychodzącą, zaś z prawdopodobieństwem m losujemy jednorodnie jeden ze wszystkich wierzchołków.

Uwaga. Poniższe definicje oraz dowody dla macierzy dodatnich są prostszym wariantem ogólniejszego twierdzenia Frobeniusa-Perrona i jego dowodu.

Definicja 9.9. Mówimy, że macierz A jest *dodatnia*, co zapisujemy $A > 0$, jeśli wszystkie jej elementy są dodatnie.

Lemat 9.10. *Jeśli $A > 0$ i jest kolumnowo stochastyczna oraz $A\vec{V} = \vec{V}$ to $\vec{V} > 0$ lub $\vec{V} < 0$.*

Lemat 9.11. *Dla dwóch niezależnych wektorów $\vec{S}, \vec{T} \in \mathbb{R}^n$ istnieje ich kombinacja liniowa, która ma pozycje różnych znaków.*