Lista 7

Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ są różnymi wartościami własnymi macierzy M, to suma (mnogościowa) baz przezstrzeni $\mathbb{V}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbb{V}_{\lambda_k}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

Wywnioskuj z tego, że $\mathbb{V}_{\lambda_1} \cap \mathrm{LIN}(\bigcup_{i=2}^{k} \mathbb{V}_{\lambda_i}) = \{\vec{0}\}$.

Wskazówka: Najprościej przez indukcję dodając pojedyncze wektory.

Zadanie 2. Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:

- $L((x, y, z)) = (2x - y, 0, y + z)$;
- $L'((x, y, z)) = (0, 0, y)$;
- $L''(x, y, z) = (y + z, x + 2z, 0)$.

Wskazówka: Czasami może być prościej wprost, bez przechodzenia przez macierze.

Zadanie 3. Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartością własną macierzy M^2, to M wa wartość własną λ lub $-\lambda$.

Wskazówka: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Zadanie 4. Rozważmy macierz kwadratową M oraz jej macierz transponowaną M^T. Udowodnij, że M oraz M^T mają te same wartości własne oraz że dla ustalonej wartości własnej λ

- jej krotności algebraiczne dla M oraz M^T są takie same;
- jej krotności geometryczne dla M oraz M^T są takie same.

Wskazówka: $\det(A) = \det(A^T)$, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^T)$.

Zadanie 5. Znajdź wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne dla poniższych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dla jednej z wartości oblicz odpowiadające wektory własne.

Zadanie 6 (* Nie liczy się do podstawy)**.** Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Wskazówka: Pokaż tezę najpierw dla B odwracalnego. Następnie dla B, które ma na przekątnej najpierw same 1 a potem same 0. Następnie udowodnij (eliminacja Gaußa), że każda macierz M jest iloczynem macierzy elementarnych oraz macierzy ww. postaci.

Zadanie 7. Niech $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że $\ker A$ oraz $\mathrm{Im}\, A$ są przestrzeniami niezmienniczymi A.

Zadanie 8 (Klatka Jordana)**.** *Klatka Jordana* wymiaru $n \times n$ to macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że ma ona dokładnie jedną wartość własną λ o krotności algebraicznej n oraz krotności geometrycznej 1.

Zadanie 9. Niech w będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Pokaż, że dla liczby zespolonej α mamy $w(\overline{\alpha}) = \overline{w(\alpha)}$ (gdzie $\bar{\cdot}$ to sprzężenie).

Wywnioskuj z tego, że jeśli w ma pierwiastek zespolony β, to $\overline{\beta}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Wywnioskuj z tego, że jeśli macierz o współczynnikach rzeczywistych (traktowana jako macierz o współczynnikach zespolonych) ma zespoloną wartość własną β, to ma też wartość własną $\overline{\beta}$.

Udowodnij, że w tym przypadku, jeśli wektor o współczynnikach zespolonych $\vec{V} = [v_1, \ldots, v_n]^T$ jest wektorem własnym dla zespolonej wartości własnej β, to $\overline{\vec{V}} = [\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n]^T$ jest wektorem własnym dla zespolonej wartości własnej $\overline{\beta}$.

Zadanie 10. Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy kolumnowo stochastycznych (dodatnich) jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Zadanie 11. Niech $M_1, \ldots, M_k$ będą macierzami kolumnowo stochastycznymi (dodatnimi) oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liczbami nieujemnymi, spełniającymi $\sum_i \alpha_i = 1$. Pokaż, że

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i$$

też jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).