Lista 9

Zadanie 1. Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$, tj. dla wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$, $\vec{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \ .$$

Pokaż, że

$$\Big[\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle\Big] = u^T v \ .$$

(Formalnie $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ jest liczbą, a $u^T v$ macierzą, ale staramy się ignorować takie drobnostki.)

Wywnioskuj z tego, że dla dowolnej macierzy M zachodzi

$$\langle \vec{u}, M\vec{v} \rangle = \left\langle M^T \vec{u}, \vec{v} \right\rangle \ .$$

Zadanie 2. Niech M będzie macierzą symetryczną (tj. $M = M^T$) wymiaru $n \times n$ a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\langle u, Mv \rangle = \langle Mu, v \rangle$$

(możesz skorzystać z Zadania 1).

Wywnioskuj z tego, że jeśli $\lambda \neq \lambda'$ są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych $\vec{v}$ oraz $\vec{v}'$, to $\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = 0$, tj. $\vec{v}$ i $\vec{v}'$ są prostopadłe.

Zadanie 3. Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{F}^n$ (nie zakładamy, że $\mathbb{F}$ to $\mathbb{R}$ albo $\mathbb{C}$, może to być też ciało skończone).

Definiujemy dopełnienie ortogonalne dowolnego $U \subseteq \mathbb{F}^n$ tak jak poprzednio, tj.

$$U^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{F}^n \ : \ \forall \vec{u} \in U \ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0\} \ .$$

Pokaż, że

$$U^\perp \leq \mathbb{F}^n \ .$$

Ponadto, dla podprzestrzeni $\mathbb{W} \leq \mathbb{F}^n$ pokaż, że

$$\dim \mathbb{W}^\perp = n - \dim \mathbb{W} \ .$$

W tym celu dla ustalonej bazy $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ przestrzeni $\mathbb{W}$ określmy macierz M jako $M = [\vec{v}_1 | \cdots | \vec{v}_k]$ i rozpatrzmy przekształcenie liniowe

$$\vec{v} \mapsto M^T \vec{v} \ .$$

Wywnioskuj z tego, że

$$(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W} \ .$$

Wskazówka: Nie można korzystać z własności baz ortogonalnych, bo ich tu może nie być.

Zadanie 4. Rozpatrzmy przestrzeń liniową wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia najwyżej 3. Zdefiniujmy iloczyn skalarny jako

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

Oblicz iloczyny skalarne $\langle x^i, x^j \rangle$ dla $0 \leq i \leq j \leq 3$.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym. Udowodnij, że dla zbioru wektorów $U \subseteq V$ zachodzi

$$U^\perp = (\mathrm{LIN}(U))^\perp \qquad \text{oraz} \qquad (U^\perp)^\perp = \mathrm{LIN}(U) \ .$$

Zadanie 6. Udowodnij, że w przestrzeni $\mathbb{V}$ nad $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym dla dowolnej pary wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ zachodzi

$$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \quad \iff \quad (\vec{u} - \vec{v}) \perp (\vec{u} + \vec{v}) \ .$$

Zapewne znasz ten fakt jako „przekątne rombu są do siebie prostopadłe”.

Zadanie 7 (Macierz Grama)**.** Zdefiniujmy macierz Grama układu wektorów $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ w przestrzeni $\mathbb{V}$ wymiaru k z iloczynem skalarnym jako

$$G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}) = (\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k} \ .$$

Niech $B = b_1, \dots, b_k$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{V}$. Zdefiniujmy macierz $A = [(\vec{v}_1)_B \,|\, (\vec{v}_2)_B \,|\, \dots \,|\, (\vec{v}_k)_B]$, tj. macierz, której j-ta kolumna to wektor z $\mathbb{R}^n$ będący wyrażeniem $\vec{v}_j$ w bazie B. Pokaż, że

$$G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}) = A^T A \ .$$

Korzystając z tej reprezentacji udowodnij, że

- $\det(G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}))$ jest nieujemny
- $\det(G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\})) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ jest liniowo zależny.

Komentarz: Założenie, że wymiar przestrzeni i liczba wektorów w układzie są takie sama nie jest potrzebne, ale ułatwia rachunki.

Zadanie 8. Niech $B = \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{V}$ a $\vec{v} \in \mathbb{V}$ dowolnym wektorem w $\mathbb{V}$. Pokaż, że jeśli $(\vec{v})_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ to

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \ .$$

Zadanie 9 (Nierówność Bessela; równość Parsevala)**.** Niech $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ będą układem ortonormalnym, tj.:

- $\forall i \ \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 1$;
- $\forall i \neq j \ \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$.

(Nie zakładamy, że jest bazą).

Pokaż, że dla dowolnego wektora v:

$$\sum_{i=1}^{k} |\, \langle \vec{e}_i, v \rangle \,|^2 \leq ||\vec{v}||^2 \ .$$

Co więcej, $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\vec{v}$ zachodzi równość.

Zadanie 10. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym nad ciałem $\mathbb{R}$, zaś $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leq \mathbb{V}$ jej podprzestrzeniami (z tym samym iloczynem skalarnym). Pokaż, że:

- $\mathbb{V}_1 \leq \mathbb{V}_2 \iff \mathbb{V}_1^\perp \geq \mathbb{V}_2^\perp$,
- $(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^\perp = \mathbb{V}_1^\perp \cap \mathbb{V}_2^\perp$,
- $(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)^\perp = \mathbb{V}_1^\perp + \mathbb{V}_2^\perp$.

Zadanie 11 (* nie liczy się do podstawy; w sumie łatwe, ale coś musi mieć gwiazdkę...)**.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na tej przestrzeni. Niech $B = \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{V}$ a $P : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ rzutem prostopadłym na podprzestrzeń jednowymiarową $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$.

Pokaż, że suma kwadratów długości rzutów prostopadłych wektorów z B na $\mathbb{W}$ wynosi 1, tj.:

$$\sum_{i=1}^{n} \|P\vec{b}_i\|^2 = 1 \ .$$

Wskazówka: Wyraź rzut przez bazę ortonormalną $\mathbb{W}$.