Lista 10

Zadanie 1. Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów jako

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\mathrm{d}x \ .$$

Dokonaj ortonormalizacji (dowolnej) bazy przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 2.

Zrzutuj prostopadle na tą przestrzeń wielomiany x^3 oraz $x^3 - x^2 + x - 1$.

Wskazówka: Do drugiej części: to jest *rzut*. Co więcej, rzut jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 2. Uzupełnij do bazy a następnie zortonormalizuj podane układy wektorów:

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Zadanie 3. Pokaż, że następujące przekształcenia są izometriami.

- obrót o kąt α na płaszczyźnie
- zamiana jednej ze współrzędnych (w bazie ortonormalnej) na przeciwną. (Przez „współrzędne” rozumiemy standardowe współrzędne $\mathbb{R}^n$.)
- symetria względem podprzestrzeni
  Przypomnienie: symetria względem $\mathbb{W}$ wyraża się jako $2P_{\mathbb{W}} - \mathrm{Id}$, gdzie $P_{\mathbb{W}}$ to rzut na $\mathbb{W}$.

Zadanie 4. Udowodnij, że złożenie izometrii jest izometrią.

Zadanie 5. Udowodnij, że jeśli M jest macierzą ortogonalną, to $\det(M) \in \{-1, 1\}$. Wywnioskuj z tego, że jeśli F jest izometrią, to $\det F \in \{-1, 1\}$.

Zadanie 6 (Nierówność Hadamarda)**.** Niech M będzie macierzą kwadratową a $C_1, \ldots, C_n$ jej kolumnami.

Pokaż, że jeśli M jest macierzą ortogonalną, to

$$|\det(M)| = \prod_{i=1}^{n} \|C_i\| \ ,$$

gdzie $\| \cdot \|$ to długość w standardowym iloczynie skalarnym.

Następnie pokaż, że w ogólności (tzn. bez założenia, że M jest ortogonalna) zachodzi

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|C_i\| \ .$$

Wskazówka: W pierwszym punkcie: ile wynosi $\det M^T$? W drugim: potraktuj kolumny M jako wektory i przeprowadź ortonormalizację. Co się dzieje ze stronami nierówności?

Zadanie 7. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są dodatnio określone:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \ .$$

Zadanie 8. Przedstaw poniższe macierze dodatnio określone w postaci $B^T B$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \ .$$

Wskazówka: Dla przypomnienia: jako macierz B możesz wziąć macierz M_{EA}, gdzie E to baza standardowa, zaś A: baza ortonormalna.

Zadanie 9. Pokaż, że:

- suma dwóch macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona;
- macierz odwrotna do macierzy dodatnio określonej jest dodatnio określona.

Zadanie 10. Niech $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ będzie macierzą dodatnio określoną. Udowodnij, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} m_{ii} \ .$$

Wskazówka: Przedstaw M jako $M = A^T A$ i skorzystaj z nierówności Hadamarda (dla A).

Zadanie 11 (Nie liczy się do podstawy)**.** Pokaż, że symetryczna macierz $n \times n$ liczb rzeczywistych jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy ma same dodatnie wartości własne.

Wskazówka: Wiemy, że dla macierzy symetrycznej suma krotności geometrycznych jej wartości własnych to n. Rozpatrz macierz Grama dla bazy ortogonalnej.