LISTA 13 – zad. 2

Typ permutacji $\sigma \in S_n$ to ciąg $(n_1, \dots, n_n)$: σ w rozkładzie na cykle rozłączne ma n_i cykli dł. i $\forall i$. $(\sum_i i n_i = n.)$

- $\underbrace{\tau^{-1}\sigma\tau}_{=\sigma'}$ ma ten sam typ, co σ.

Spróbujmy zgadnąć, jak wygląda σ' w rozkładzie na cykle rozłączne. Jeśli σ przeprowadza i na j, to dla σ' łatwo określić, na co przeprowadza ona ...nie i, tylko $\tau^{-1}(i)$:

$$(\tau^{-1}\sigma\tau)(\tau^{-1}(i)) = \tau^{-1}(\sigma(i)) = \tau^{-1}(j).$$

Zatem jeśli w σ był cykl $(i, \sigma(i), \sigma^2(i) \dots)$ to σ' ma cykl $(\tau^{-1}(i), \tau^{-1}(\sigma(i)), \tau^{-1}(\sigma^2(i)), \dots)$.
Jeśli ponumerujemy jakoś cykle w σ, tak, że $\sigma = \prod_k (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,L(k)})$ gdzie $\prod$ oznacza złożenie permutacji, a $L(k)$ to długość cyklu o indeksie k, to $\sigma' = \prod_k (\tau^{-1}(a_{k,1}), \tau^{-1}(a_{k,2}), \dots, \tau^{-1}(a_{k,L(k)}))$. k-ty cykl w σ i w σ' mają tę samą długość, więc σ i $\sigma' = \tau^{-1}\sigma\tau$ mają ten sam typ.

- $\mathcal{T}$ – podział S_n na zbiory permutacji tego samego typu. Mamy $H \leq G \leq S_n$ oraz $\forall T \in \mathcal{T}$ $H \cap T = G \cap T$ lub $H \cap T = \emptyset$. Udowodnimy $H \trianglelefteq G$.

Ustalmy dowolną permutację $\tau \in G$. Pokażemy, że $\tau^{-1} H \tau \subseteq H$, co da tezę z lematu 17.5.
Ustalmy typ i zbiór wszystkich permutacji tego typu $T \in \mathcal{T}$. Rozważmy dwie możliwe postaci zbioru $H \cap T$:

  - $H \cap T = \emptyset$, wtedy $\tau^{-1}(H \cap T)\tau = \emptyset \subseteq H \cap T$
  - $H \cap T = G \cap T$. Wtedy $\tau^{-1}(H \cap T)\tau = \tau^{-1}(G \cap T)\tau \overset{(*)}{\subseteq} G \cap T = H \cap T$

(*) Weźmy $\sigma \in G \cap T$. $\tau^{-1}\sigma\tau \in T$, bo jest tego samego typu (p.w.), $\tau^{-1}\sigma\tau \in G$ bo $\tau, \sigma \in G$. Stąd $\tau^{-1}\sigma\tau \in G \cap T$.

W obu przypadkach $\tau^{-1}(H \cap T)\tau \subseteq H \cap T$, a zatem możemy „wysumować stronami po T":

$$\tau^{-1} H \tau \overset{(\dagger)}{=} \tau^{-1}\left(\bigcup_T H \cap T\right)\tau = \bigcup_T \left(\tau^{-1}(H \cap T)\tau\right) \subseteq \bigcup_T (H \cap T) \overset{(\dagger)}{=} H,$$ co daje tezę.

(†) Ponieważ skoro $\mathcal{T}$ jest podziałem S_n, to $\{H \cap T\}_{T \in \mathcal{T}}$ (z dokładnością do zbiorów pustych) jest podziałem H.

- $H = \{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \trianglelefteq S_4$.

Natychmiastowy wniosek z poprzedniej części – weźmy $G = S_n = S_4$ i zauważmy, że H:

  - zawiera wszystkie permutacje typów $(4,0,0,0)$ (czyli e) oraz $(0,2,0,0)$ z S_4,
  - nie zawiera permutacji innych typów, tj. $(2,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1)$.