ALGEBRA

→ równania liniowe

$2x = 3$

$\begin{cases} 2x + 7y = 2 \\ \cancel{x} - 3y = 5 \end{cases}$

$\mathbb{R}$

→ wyższego st. $x^2 + x = 1$

org.

ćw. ⇝ pt/nd lista ~ śr. rep ~ ćw. dek.

⇝ pt wyznaczone osoby (przygotowane)

⇝ pn ćwiczenia ← ± obowiązkowe

zad. od ćw.

~~83%~~

40 - 55%	3
55 - 65	3,5
65 - 75	4
75 - 85	4,5
85≤	5

10 + L

10

140 pkt

2 zad domowe

prez. / zadekl.

Egzamin pis.

ustny.

Rozdział 1

Ciała, przestrzenie liniowe, liniowa niezależność, eliminacja Gaußa

uogólnienie $\mathbb{R}^n$

1.1 Ciała

$\mathbb{F}$

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ p ← pierwsze

$\mathbb{Z}_p : \{0, \dots, p-1\}$

$\cdot_p$ $(a\, b) \bmod p$

$+_p$ $(a+b) \bmod p$

$\cdot$ mnożenie

$+$ dodawanie

$0, 1$ $0 \neq 1$

$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ $a\cdot b = b\cdot a$ $a+b = b+a$

$1\cdot a = a$ $0 + a = a$

$a + (-a) = 0$ ← el. przeciwny $\mathbb{Z}_7$ $2\cdot 4 = 1$

5

$a^{-1}\cdot a = 1$ ← el. odwrotny $2+5=0$

$\frac{1}{a}$

Przykład 1.1. Ciałami są: liczby rzeczywiste ($\mathbb{R}$), liczby wymierne ($\mathbb{Q}$), liczby zespolone ($\mathbb{C}$), reszty modulo p ($\mathbb{Z}_p$) dla p — liczby pierwszej.

Poza $\mathbb{Z}_p$ działania określamy w naturalny sposób. W $\mathbb{Z}_p$ działania $\cdot_p$ oraz $+_p$ określamy jako:

- $a +_p b = (a + b) \bmod p$
- $a \cdot_p b = (a \cdot b) \bmod p$

gdzie $a \bmod p$ oznacza resztę z dzielenia a przez p. (Dla przypomnienia, b jest resztą z dzielenia $a \in \mathbb{Z}$ przez p, jeśli $0 \leq a < p$ i istnieje liczba $c \in \mathbb{Z}$ taka że $bp + b = a$).

W ciele są dwie operacje: mnożenie "$\cdot$" i dodawanie "$+$", są one przemienne i zachowują się tak, jak intuicyjnie oczekujemy. Są też dwa wyróżnione elementy $0, 1$, które w naszych przykładach pokrywają się z tradycyjnie rozumianymi wyróżnionymi 0 i 1 i mają te same własności, tj. $1 \cdot \alpha = \alpha$ oraz $0 + \alpha = \alpha$.

W ciele przez $-\alpha$ rozumiemy element taki, że $\alpha + (-\alpha) = 0$ a przez α^{-1} dla $\alpha \neq 0$ (pisane też jako $\frac{1}{\alpha}$) taki, że $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$. W ciałach $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ oba te elementy wyglądają tak, jak się spodziewamy, w $\mathbb{Z}_p$ sytuacja jest trochę bardziej skomplikowana.

1.2 Przestrzenie liniowe

$2\cdot[2\ 3\ 5\ -\tfrac{1}{7}\ \sqrt{3}]$
$=[4\ 6\ 5\ -\tfrac{2}{7}\ 2\sqrt{3}]$

O przestrzeni liniowej chcemy myśleć, iż jest to uogólnienie $\mathbb{R}^n$. O jej elementach nazywamy *wektorami* i myślimy, że są to punkty w $\mathbb{R}^n$, ale traktowane jako wektory, tzn. możemy je dodawać i mnożyć przez elementy z $\mathbb{R}$, jest to mnożenie przez *skalary*.

$\mathbb{R}^n$ $\quad$ $\mathbb{R}$

Definicja 1.2. Zbiór $\mathbb{V}$ jest *przestrzenią liniową nad ciałem* $\mathbb{F}$, jeśli:

$+, \cdot, 0, 1$

1. W $\mathbb{V}$ określone jest dodawanie

   $+: \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ $\qquad \mathbb{R}^n$ ✓

2. Dodawanie w $\mathbb{V}$ jest przemienne, tj.:

   $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ $\qquad \mathbb{R}$ ✓

3. Dodawanie w $\mathbb{V}$ jest łączne:

   $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ $\qquad \mathbb{R}^n$

   W związku z tym dodawanie w $\mathbb{V}$ zapisujemy bez nawiasów.

4. W $\mathbb{V}$ istnieje wyróżniony wektor $\vec{0}$:

   $\vec{0}$ $\qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbb{R}^n$

   $\vec{0}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{0} = \vec{v}$

5. Dla każdego elementu $\vec{v}\in\mathbb{V}$ istnieje element przeciwny $-\vec{v}$:

   $\vec{v} + -\vec{v} = \vec{0}$ $\qquad \begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ z \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -x \\ \vdots \\ -z \end{bmatrix}$

6. Zdefiniowane jest mnożenie (lewostronne) elementów $\mathbb{V}$ przez elementy z $\mathbb{F}$:

   $\cdot: \mathbb{F}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ $\quad \alpha\cdot\vec{v}$ $\qquad \alpha\cdot\begin{bmatrix} \ \\ \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\cdot \\ \vdots \\ \alpha\cdot \end{bmatrix}$

7. Zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania (skalarów):

   $(\alpha+\beta)\cdot\vec{v} = (\alpha\vec{v})+(\beta\vec{v})$

   $\mathbb{F}$ $\qquad$ w pr. wekt.

8. Zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania (wektorów):

   $\alpha\cdot(\vec{v}+\vec{u}) = (\alpha\cdot\vec{v})+(\alpha\cdot\vec{u})$

9. Mnożenie jest łączne:

   pr. we

   $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{v} = \alpha\cdot(\beta\cdot\vec{v})$ $\qquad 3\cdot 7\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   $\mathbb{F}$

10. Mnożenie przez „jedynkę” z ciała zachowuje wektor:

    $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$ $\quad \leftarrow$ potrzebne?

Elementy $\mathbb{V}$ nazywamy *wektorami*, zaś elementy $\mathbb{F}$: *skalarami*.

$\vec{v},\vec{u},\vec{w}$ $\qquad \alpha,\beta,\gamma$

Przykład 1.3. 1. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{Z}_p^n$, każde nad odpowiednim ciałem: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, dowolnym, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$.

R C $\mathbb{Z}_p$

2. Zbiory funkcji: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zbiory funkcji o skończenie wielu (przeliczalnie wielu) wartościach niezerowych.

   $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$

   $(\alpha\cdot f)(a) = \alpha\cdot f(a)$

   Ale nie: zbiory funkcji o skończenie wielu wartościach równych 1.

   $f(0)=1$ $f(x)=1$ $f(0)=-1$ $=1$

3. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{Q}$.

   $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ ~~$\mathbb{R}$ nad $\mathbb{C}$~~

4. Zbiory ciągów nieskończonych o wartościach w $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$, …(czyli zbiory funkcji $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$, …)

5. Zbiory ciągów skończonych o wartościach w $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$, …

6. Zbiory wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{F}$ nad $\mathbb{F}$. Zbiory wielomianów określonego stopnia. Zbiory wielomianów zerujących się w jakichś punktach.

   $f(1)=0$ $f(3)=0$

7. Punkty w $\mathbb{R}^2$ spełniające równanie $2x+y=0$. Punkty w $\mathbb{R}^3$ spełniające równanie $2x+y=0, x-y+3z=0$. Ale nie $2x+y=1, x-y+3z=0$.

Też mają dużo oczekiwanych własności.

$2x+y=1 \quad /\cdot\alpha$

$2\cdot(\alpha x)+(\alpha y)=\alpha$

Fakt 1.4. *1.* $\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V}} 0\cdot\vec{v} = \vec{0}$

2. $\forall_{\alpha\in\mathbb{F}} \alpha\cdot\vec{0} = \vec{0}$

3. $\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V},\alpha\in\mathbb{F}} \alpha\cdot\vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v} = \vec{0} \vee \alpha = 0$

4. $\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V}} (-1)\vec{v} = -\vec{v}$

$1 \quad -1$ $\quad 1+(-1)=0$

$(-1)\cdot\vec{v} = -\vec{v}$

5. wektor przeciwny jest dokładnie jeden

jedyne

$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$ $\quad \vec{v}+\vec{u}=0$

6. wektor zerowy jest dokładnie jeden

$\vec{0}$ $\quad \vec{v}+\vec{u}=\vec{v}$ $\quad \vec{u}=\vec{0}$

7. …

1.3 Podprzestrzenie liniowe

$x+2y=0$ → $\mathbb{R}^n$, wielomiany $st \leq k$ $f(1)-f(2)=0$

Definicja 1.5 (Podprzestrzeń liniowa)**.** Dla przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ jej podzbiór $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ jest *podprzestrzenią liniową*, gdy jest przestrzenią liniową nad tym samym ciałem i działania są określone tak, jak w $\mathbb{V}$. Zapisujemy to jako $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$.

$\mathbb{V}$ $f+g=h$ $\mathbb{W}$

Taki zbiór musi być niepusty (ale może zawierać tylko $\vec{0}$).

Przykład 1.6.

1. cała przestrzeń $\mathbb{V}$ jest swoją podprzestrzenią;

   $\mathbb{V} \leq \mathbb{V}$

   trywialne podprzestrzenie

2. $\{\vec{0}\}$ jest podprzestrzenią;

   $\{\vec{0}\} \leq \mathbb{V}$

3. w $\mathbb{R}^n$ zbiór wektorów mających 0 na ustalonych współrzędnych;

   0 2
   0 5
   0 7

4. w $\mathbb{R}^n$ zbiór wektorów których o sumie współrzędnych równej 0;

   $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$

5. dla zbioru wszystkich wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{F}$, zbiór wielomianów o stopniu najwyżej k;

6. dla zbioru wszystkich wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{F}$, zbiór wielomianów przyjmujących wartość 0 w ustalonym zbiorze punktów;

   $f(2)=f(5)=0$

7. w $\mathbb{R}^n$ zbiór wektorów spełniających równania $x_1+2x_2=0$ i $x_3-x_2=0$.

Lemat 1.7. *Niepusty podzbiór przestrzeni liniowej jest podprzestrzenią wtedy i tylko wtedy gdy jest zamknięty na dodawanie i mnożenie przez skalary.*

$\Rightarrow$ $\mathbb{U} \leq \mathbb{V}$ $\qquad$ $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$

$\cdot, +$ z def. jest zamknięta

$\Leftarrow$ $\cdot$ $\vec{0} \in \mathbb{U}$ $\quad \vec{v} \in \mathbb{U}$ $\quad \vec{v}$ $\quad -\vec{v}$

$0 \cdot \vec{v} = \vec{0} \in \mathbb{U}$ $\qquad (-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$

$\mathbb{R}^n$

Podprzestrzenie liniowe można generować używając pewnych standardowych operacji: przecięcia, sumy, iloczynu kartezjańskiego.

Definicja 1.8 (Suma, przecięcie, iloczyn kartezjański przestrzeni liniowych)**.** Niech $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$. Wtedy ich *suma* to

$\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$

$$\mathbb{W} + \mathbb{W}' = \{w + w' \ : \ w \in \mathbb{W}, \ w' \in \mathbb{W}'\}. \subseteq \mathbb{V}$$

Dla dowolnego zbioru podprzestrzeni liniowych $\{\mathbb{W}_i\}_{i \in I}$, gdzie $\mathbb{W}_i \leq \mathbb{V}$ dla każdego $i \in I$, przecięcie zdefiniowane jest naturalnie jako $\bigcap_{i \in I} \mathbb{W}_i$ (jako zbiór). $\cap \mathbb{V}$

Dla dowolnego zbioru przestrzeni liniowych $\{\mathbb{V}_i\}_{i \in I}$ nad tym samym ciałem produkt kartezjański $\prod_{i \in I} \mathbb{V}_i$ zdefiniowany jest naturalnie. Działania zdefiniowane są po współrzędnych.

$\Pi(\mathbb{W}_i)$ $\qquad \mathbb{V} \times \mathbb{W}$ $\qquad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^7 \cong \mathbb{R}^{10}$

Lemat 1.9. *Suma, przecięcie oraz iloczyn kartezjański przestrzeni liniowych jest przestrzenią liniową.*

$\leq \mathbb{V}$

Suma przestrzeni liniowych $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest najmniejszą przestrzenią liniową zawierająca jednocześnie $\mathbb{W}$ i $\mathbb{W}'$.

Przekrój przestrzeni liniowych $\bigcap_i \mathbb{W}_i$ jest największą przestrzenią liniową zawartą jednocześnie we wszystkich podprzestrzeniach $\mathbb{W}_i$.

Dowód pozostawiony jest jako ćwiczenie.

1.4 Kombinacje liniowe wektorów

W przestrzeniach liniowych możemy w zwarty sposób reprezentować zbiory poprzez sumy.

$u \in$ mięk.

Definicja 1.10 (Kombinacja liniowa)**.** Dla wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ ich *kombinacja liniowa* to dowolny wektor postaci $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i$, gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest ciągiem skalarów z ciała $\mathbb{F}$.

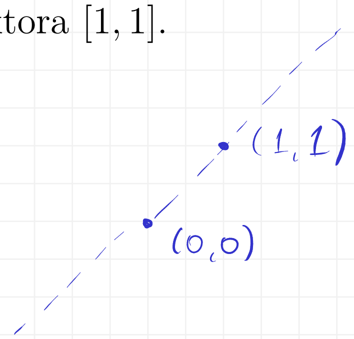
$v_1, \ldots v_i$ – różne / dowolne =

$\mathbb{Z}_p$ $\neq 0$

Kombinacja liniowa jest *z definicji* skończona.

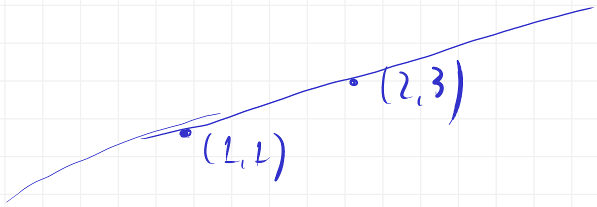
Przykład 1.11.

- W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ prosta przechodząca przez $(0,0)$ i $(1,1)$ to kombinacja wektora $[1,1]$.



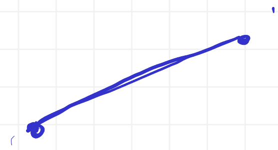
← prosta kombinacje liniowe $(0,0)$, $(1,1)$

- Prosta przechodzące przez punkty $(1,1)$ i $(2,3)$ to kombinacja postaci $\alpha[1,1] + (1-\alpha)[2,3] = [1,1] + (1-\alpha)\cdot[1,2]$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$.



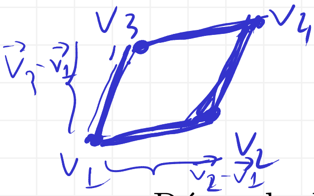
$\alpha \cdot (1,1) + (1-\alpha)\cdot [2,3]$ $\alpha \in \mathbb{R}$

- Odcinek między $(1,1)$ a $(2,3)$ to ograniczona kombinacja postaci $\alpha[1,1] + (1-\alpha)[2,3]$ dla $\alpha \in [0,1]$.



$\alpha \cdot (1,1) + (1-\alpha)\cdot(2,3)$

$\alpha \in [0,1]$



$\vec{v}_1 + \alpha\cdot(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \beta\cdot(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)$

$\alpha, \beta \in [0,1]$

obwód: przynajmniej jedno z $\alpha, \alpha \in \{0,1\}$

- Równoległobok o wierzchołkach w punktach $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$, spełniających warunki $\vec{v}_1 + \vec{v}_4 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ to zbiór punktów spełniających $\vec{v}_1 + \alpha(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \beta(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)$ dla $\alpha, \beta \in [0,1]$. Obwód tego równoległościanu spełnia dodatkowo warunek, że przynajmniej jedna z liczb α, β należy do zbioru $\{0,1\}$.

Definicja 1.12. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$. Dla dowolnego zbioru wektorów (skończonego lub nie) $U \subseteq \mathbb{V}$ jego *otoczka liniowa*, oznaczana jako $\mathrm{LIN}(U)$, to zbiór kombinacji liniowych wektorów ze zbioru U:

niesk. $\quad \ni \vec{0}$

$$\mathrm{LIN}(U) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i \mid k \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F},\ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{V} \right\}. \tag{1.1}$$

$\mathrm{LIN}(U)$ nazywane jest też *podprzestrzenią rozpiętą* przez U lub *domknięciem liniowym* U.

: $v_1, \dots, v_k \leftarrow$ różne / nie

: $k = 0$

Przykład 1.13. Dla zbioru wszystkich ciągów nieskończonych o wartościach z $\mathbb{R}$, niech $\vec{e}_i$ to ciąg mający na i-tym miejscu 1 i mający 0 na pozostałych pozycjach. Wtedy $\mathrm{LIN}(\{\vec{e}_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ to zbiór ciągów o skończenie wielu niezerowych współrzędnych.

$(1, 3, -7, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, \dots\dots) \leftarrow$ niesk.

$e_i = (\quad 1 \quad)$

$\uparrow$ i-te miejsce

$\mathrm{LIN}(\{e_i\})$ $\quad (1, 1, \dots, 1, \dots)$

• $\mathrm{LIN}(U)$ podprzestrzeń liniowa $\quad U \subseteq \mathbb{V}$

$\vec{0} \in \mathrm{LIN}(U) \subseteq \mathbb{V}$

$+, \cdot$

$v, v' \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{u}_i \quad \vec{v}' = \sum_{i=1}^{k'} \alpha_i' \vec{u}_i'$

$\vec{v} + \vec{v}' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{k'} \alpha_i' \vec{u}_i' \in \mathrm{LIN}(U)$

$\alpha \cdot v \quad \alpha \cdot \sum \alpha_i \vec{u}_i = \sum \alpha \cdot \alpha_i \vec{u}_i$

Dla prostoty zapisu, nie zakładamy, że wektory $v_1, \dots, v_k$ są różne, ale jeśli to wygodne, to bez zmniejszenia ogólności możemy to założyć. Dla układu wektorów $v_1, \dots, v_k$ będziemy czasami pisać $\mathrm{LIN}(v_1, \dots, v_k)$ na oznaczenie $\mathrm{LIN}(\{v_1, \dots, v_k\})$.

Fakt 1.14. *Dla dowolnego zbioru wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ otoczka liniowa $\mathrm{LIN}(U)$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{V}$. Jest to najmniejsza przestrzeń liniowa zawierająca U.*

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{V}$

$LIN(\mathcal{U})$ ← najmniejsza prz. zaw. $\mathcal{U}$.

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{W} \leq \mathbb{V}$

$LIN(\mathcal{U}) \leq \mathbb{W}$

$\mathbb{W}$ - zam. na komb. lin.

Fakt 1.15. *Jeśli* $U \subseteq U' \subseteq \mathbb{V}$, *gdzie* $\mathbb{V}$ *jest przestrzenią liniową, to* $\mathrm{LIN}(U) \leq \mathrm{LIN}(U')$.

Komb. liniowa wekt. z U jest też komb. wekt. z U'

$$\sum \alpha_i u_i \qquad \qquad \mathrm{LIN}(U')$$

Lemat 1.16. *Niech* $\mathbb{V}$ *będzie przestrzenią liniową,* $U \subseteq \mathbb{V}$ *układam wektorów. Wtedy:*

$$\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(\mathrm{LIN}(U)) \ .$$

Jeśli $U \subseteq \mathrm{LIN}(U')$ *i* $U' \subseteq \mathrm{LIN}(U)$ *to*

$$\mathrm{LIN}(U') = \mathrm{LIN}(U) \ .$$

- $\mathrm{LIN}(\mathrm{LIN}(U))$

$$\sum \alpha_i \cdot \sum_{j_i} \alpha_{ij} u_{ij} \quad \dots$$

- $\mathrm{LIN}(\mathrm{LIN}(U)) \leftarrow$ najmniejsza prz. liniowa zaw. $\mathrm{LIN}(U)$

$= \mathrm{LIN}(U)$ to jest prz. liniowa

$U \subseteq \mathrm{LIN}(U')$ / $U' \subseteq \mathrm{LIN}(U) \Rightarrow \mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(U')$

$\mathrm{LIN}(U) \subseteq \mathrm{LIN}(\mathrm{LIN}(U')) = \mathrm{LIN}(U') = \mathrm{LIN}(U') \subseteq \mathrm{LIN}(U)$

Otoczka liniowa jest niezmiennicza na kombinacje liniowe.

Lemat 1.17. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{V}$ wektorami z tego ciała. Jeśli skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ są niezerowe to*

$$\mathrm{LIN}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{LIN}(\alpha_1 \vec{v}_1, \dots, \alpha_k \vec{v}_k) \ .$$

Dla $i \neq j$ oraz skalara $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\mathrm{LIN}(v_1, \overset{v_i}{\dots}, v_k) = \mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \alpha \vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_k) \ .$$

1) $\{\vec v_1, \vec v_2, \dots, \vec v_k\} \subseteq LIN(\alpha_1 \vec v_1, \dots, \alpha_k \vec v_k))$

$\vec v_i \in LIN(\alpha_i \vec v_i)$

$\{\alpha_1 \vec v_1, \dots, \alpha_k \vec v_k\} \subseteq LIN(\vec v_1, \dots, \vec v_k\}$

2) $\{\vec v_1, \dots, \vec v_k\} \subseteq LIN(v_1, \dots, v_i + \alpha v_j, \dots v_k)$

v_i

$v_i + \alpha v_j \ (-\alpha) v_j = v_i$

$\{v_1, \dots, v_i + \alpha v_j, \dots v_k\} \subseteq LIN(v_1, \dots, v_k\}$

$v_i + \alpha \cdot v_j$

$LIN((0,0,1)(0,1,0))$

$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x \\ y \end{smallmatrix}\right)$

$LIN((0,2,3),(0,7,4))$

$\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$

Lemat 1.18. *Niech $\mathbb{V}$: przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{F}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{V}$: zbiór wektorów z $\mathbb{V}$, zaś $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$: ciąg skalarów, gdzie $\alpha_1 \neq 0$. Wtedy*

$$\mathrm{LIN}\left(\left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i, \vec{v}_2 \dots, \vec{v}_k\right\}\right) = \mathrm{LIN}\left(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots, \vec{v}_k\}\right). \tag{1.2}$$

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie. $\alpha_1 \neq 0$

1.5 Liniowa niezależność wektorów.

niech.

Definicja 1.19. Układ wektorów U jest *liniowo niezależny* gdy dla dowolnego $k \geq 0$, dowolnych różnych $v_1, \dots, v_k \in U$ oraz ciągu współczynników $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$$

$\vec v, \vec v$

implikuje

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \ .$$

Uwaga. U traktujemy jako multizbiór: jeśli zawiera jakiś element m razy, to można go m razy użyć. W takim przypadku U jest liniowo zależny, bo $\vec{v} + (-1) \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Fakt 1.20. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Układ wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy jeden z nich można przedstawić jako liniową kombinację pozostałych.*

Równoważne sformułowanie: Układ wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $u \in U$ taki że $u \in \mathrm{LIN}(U \setminus \{u\})$.

$\Rightarrow$

układ u jest lin. zal.

z def. $(\alpha_1 \dots \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$ $\quad u_1, \dots, u_k$

$$\sum \alpha_i \vec{u_i} = \vec{0}$$

bzo. $\alpha_1 \neq 0$

$$(-\alpha_1) \cdot \vec{u_1} = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \vec{u_i} \qquad / \cdot \left(-\frac{1}{\alpha_1}\right)$$

$$\vec{u_1} = -\sum_{i=2}^{k} (\alpha_i \cdot \alpha_1^{-1}) \vec{u_i}$$

$\Leftarrow$ $\quad \vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{u_i} - \vec{u} \quad \leftarrow$ nietr. przedst $\vec{0}$

Fakt 1.21. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Układ wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $u \in U$ taki że*

$$\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(U \setminus \{u\}).$$

Jeśli U nie zawiera $\vec{0}$, to są przynajmniej dwa takie wektory.

(Uwaga: traktujemy U jako multizbiór, tzn. jeśli zawiera dwa razy ten sam wektor, to wyborem u mogą być dwie różne „kopie" tego samego wektora.)

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Uogólnijmy Lemat 1.18.

Lemat 1.22 (Porównaj Lemat 1.18)**.** *Niech $U = (v_1, \dots, v_k)$ będzie układem wektorów, rozpatrzmy układy*

$$U' = (v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha\vec{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_k) \qquad \text{dla } \alpha \neq 0, 1 \leq i \leq k$$
$$U'' = (v_1, \dots, v_{i-1}, \vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j, v_{i+1}, \dots, v_k) \qquad \text{dla } i \neq j.$$

Wtedy U jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy gdy U' jest liniowo zależny, wtedy i tylko wtedy gdy U'' jest liniowo zależny.