1.5 Liniowa niezależność wektorów.

Definicja 1.19. Układ wektorów U jest *liniowo niezależny* gdy dla dowolnego $k \geq 0$, dowolnych różnych $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in U$ oraz ciągu współczynników $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$$

implikuje

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 \ .$$

Uwaga. U traktujemy jako multizbiór: jeśli zawiera jakiś element m razy, to można go m razy użyć. W takim przypadku U jest liniowo zależny, bo $\vec{v} + (-1) \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Fakt 1.20. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Układ wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy jeden z nich można przedstawić jako liniową kombinację pozostałych.*

Równoważne sformułowanie: Układ wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\vec{u} \in U$ taki że $\vec{u} \in \mathrm{LIN}(U \setminus \{\vec{u}\})$.

Fakt 1.21. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Układ wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\vec{u} \in U$ taki że*

$$\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(U \setminus \{\vec{u}\}).$$

są ≥ 2 możliwości
lub $\vec{u} = \vec{0}$

Jeśli U nie zawiera $\vec{0}$, to są przynajmniej dwa takie wektory.

(Uwaga: traktujemy U jako multizbiór, tzn. jeśli zawiera dwa razy ten sam wektor, to wyborem u mogą być dwie różne „kopie" tego samego wektora.)

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Uogólnijmy Lemat 1.18.

Lemat 1.22 (Porównaj Lemat 1.18). *Niech $U = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ będzie układem wektorów, rozpatrzmy układy*

$$U' = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \alpha\vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_k) \qquad \text{dla } \alpha \neq 0, 1 \leq i \leq k$$
$$U'' = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_k) \qquad \text{dla } i \neq j.$$

Wtedy U jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy gdy U' jest liniowo zależny, wtedy i tylko wtedy gdy U'' jest liniowo zależny.

1) $U, U' \leftarrow \vec{v}_i / \alpha\vec{v}_i$

U jest liniowo zal. $\Leftrightarrow \exists \vec{u} \in U \quad LIN(U) = LIN(U \setminus \{\vec{u}\})$

$\vec{u} \leftarrow$ i. tmieje

a) $\vec{u} = \vec{v}_j \quad i \neq j \quad LIN(U \setminus \{v_j\}) = LIN(U)$

$LIN(U' \setminus \{v_j\}) = LIN(U \setminus \{\vec{v}_j\})$
$= LIN(U) = LIN(U')$

• U - jest liniowo zal.
$\Rightarrow U'$ jest liniowo zal. U z $\vec{v}_i$ zam. na αv_i
U' jest liniowo zal $\Rightarrow U$ jest liniowo zal.

$\vec{u} = \vec{u}_i \quad LIN(U \setminus \{v_i\}) = LIN(U' \setminus \{\alpha\vec{v}_i\})$

$LIN(U) = LIN(U')$

2) $U = \{\vec{v}_1, \ldots, v_k\}$

$U'' = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j, \ldots \vec{v}_k\}$

$\vec{u} \leftarrow$ t. że $\quad LIN(U) = LIN(U \setminus \{\vec{u}\})$

$LIN(U'') = LIN(U'' \setminus ?)$

• $\vec{u} = \vec{0} = \vec{v}_l \quad l \neq i$ zal.

$\vec{u} = \vec{0} = \vec{v}_i \quad U \leftarrow$ zl. $\quad U'' \quad \alpha\vec{v}_j \quad \vec{v}_j$

• $U \setminus \{\vec{u}\}$ to nie jest $\vec{v}_j$

--- i ---

$\vdots \quad$ j. w.

$\sum \alpha_i v_i = \vec{0}$

$LIN(U)$

U
U'
α
$\sum \alpha_j \vec{v}_j = \vec{0}$
$\alpha_i' = \alpha_i \cdot \alpha^{-1}$

1.6 Metoda eliminacja Gaußa.

Chcemy mieć usystematyzowany sposób znajdowania dla (skończonego) zbioru wektorów $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jego maksymalnego (względem zawierania) podzbioru niezależnego.

Chcemy uogólnić następujące obserwacje:

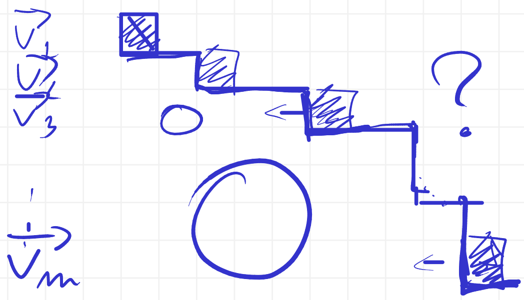
- jeśli każdy wektor ma współrzędną, na której tylko on jest niezerowy, to zbiór jest liniowo niezależny;
- układ wektorów zawierający $\vec{0}$ nie jest niezależny;
- używając Lematu 1.22 możemy „upraszczać wektory”.

Przykład 1.23.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

liniowo niez.

LIN(   )



NIE

Sformalizujmy postać wektorów, do której w ten sposób dojdziemy.

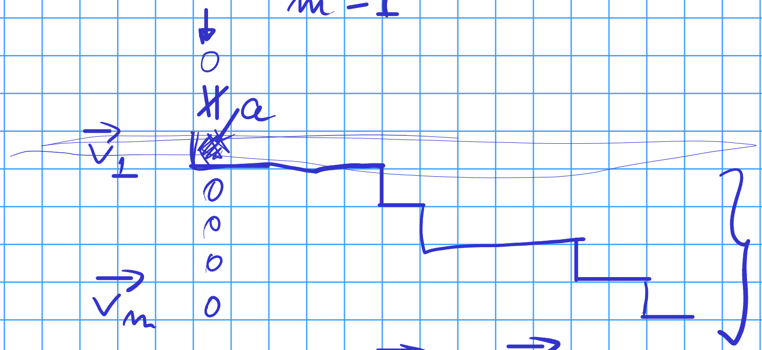
Definicja 1.24 (Postać schodkowa)**.** Układ wektorów $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{F}^n$ jest w *postaci schodkowej*, jeśli istnieje ciąg pozycji $0 = i_0 < i_1 < i_1 < \cdots < i_m$ takich że dla każdego $j = 1, \dots, m$:

- wektor $\vec{v}_j$ ma na pozycji i_j element niezerowy
- wektor $\vec{v}_j$ ma na pozycjach $< i_j$ same 0.

Lemat 1.25. *Jeśli układ wektorów w $\mathbb{F}^n$ jest w postaci schodkowej, to jest niezależny.*

Indukcja po liczbie wektorów.

$m = 1$



$\alpha_i = 0$

$\vdots$

$\alpha_m = 0$

$\sum \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$

$\alpha_1 \cdot a \, \square = 0$

$\alpha_1 = 0$

z zał. ind $\{v_1, \ldots, v_m\}$

$\sum \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$

to $\alpha_i = \vec{0}$

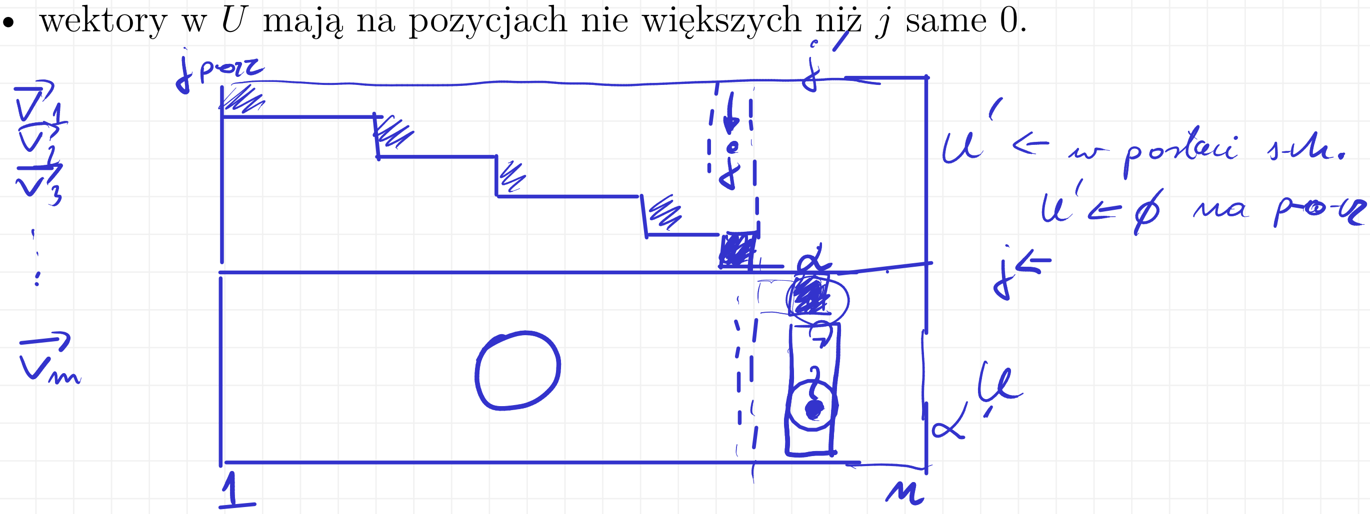
W ogólności chcemy przekształcić dowolny układ wektorów używając operacji jak w Lemacie 1.22 do zbioru wektorów w postaci schodkowej i wektorów $\vec{0}$. Jeśli tych drugich nie ma, to wejściowy zbiór był niezależny, jeśli są, to był zależny.

Pokażemy teraz, że używając takich operacji zawsze można sprowadzić układ do postaci schodkowej.

W każdym kroku metody utrzymujemy dwa zbiory wektorów: U oraz U' oraz pozycję j. Początkowo U jest całym zbiorem wektorów, U' jest pusty, zaś $j = 0$. Jako niezmiennik utrzymujemy następujące własności:

- U' jest w postaci schodkowej oraz indeksy odpowiednich niezerowych pozycji są nie większe niż j

- wektory w U mają na pozycjach nie większych niż j same 0.



minim. $j' \leftarrow$ t.że w U jest v z niezerową poz j'

zamieniamy v na kolejny wektor, dod. $\vec{v}$ do U', $j \leftarrow j'$

wyjmujemy $\vec{v}$ z U

· for $\vec{u} \in U$ $\quad \vec{u} \leftarrow \vec{u} - \alpha_u \alpha^{-1} \vec{v}$

W każdym kroku wybieramy pozycję j' oraz wektor $v \in U$ takie że:

- $j' > j$ i j' jest najmniejsze, takie że któryś z wektorów z U ma niezerową współrzędną j'

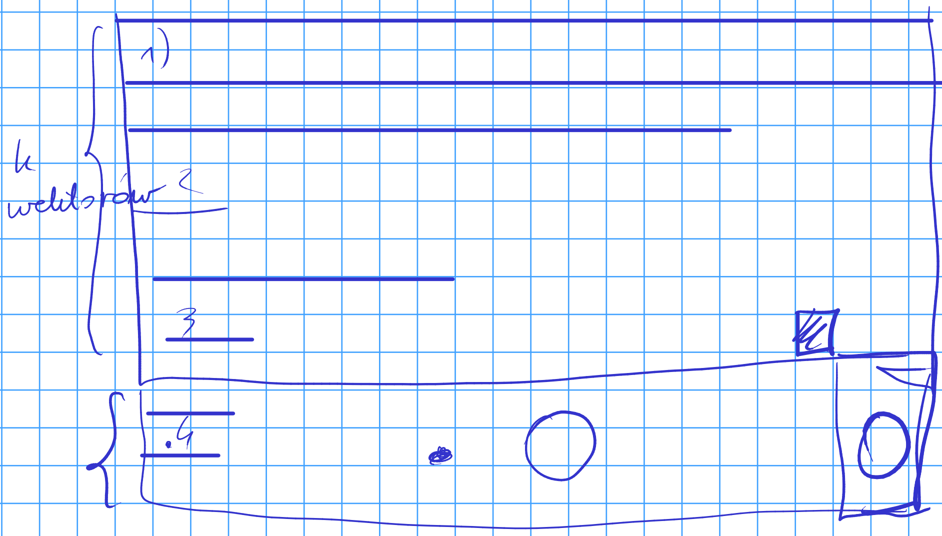
- $v \in U$ oraz ma niezerową współrzędną j'

Dodajemy v do U', wybieramy j' jako nowe j.

Niech $(v)_{j'} = \alpha$. Dla każdego $v' \in U \setminus \{v\}$: Niech $(v')_{j'} = \alpha'$. Zastępujemy $\vec{v}'$ przez $\vec{v}' - \frac{\alpha'}{\alpha}\vec{v}$.

Łatwo pokazać, że po tym wyborze niezmienniki są zachowane.

Lemat 1.26. *Po zakończeniu otrzymujemy układ złożony z wektorów liniowo niezależnych oraz samych wektorów zerowych.*



$U' \leftarrow$ postać sch.

U

• zakończyliśmy alg.

nie da się wybrać $(j', \vec{v})$ $\uparrow_U$

1) nie ma j' w U są tylko $\vec{0}$

2) U – puste

$U' \leftarrow$ liniowo niez.

1) wyjściowy układ był l. zal.

2) — " — " — liniowo niez.

Fakt 1.27. *Oryginalny zbiór był niezależny wtedy i tylko wtedy gdy nie otrzymaliśmy żadnego wektora* $\vec{0}$.

Jeśli w czasie eliminacji Gaußa używaliśmy do eliminowania jedynie wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, *które na końcu są niezerowe, to odpowiadające im wektory początkowe tworzą bazę przestrzeni rozpiętej przez wszystkie wektory.*

Możliwe, że źle!

$$
\begin{array}{rrrr} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}
\to
\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 & 10 \end{array}
\to
\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}
\to
\begin{array}{rrrrl} 0 & 1 & 1 & 2 & 2) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3) \\ -1 & 3 & 2 & 5 & 1) \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4) \end{array}
$$

$$
\to
\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}
$$

Liniowo niezależne

Rozdział 2

Baza przestrzeni liniowej, wymiar

Uwaga: B - liniowo niez. LIN(B) B - jest bazą

2.1 Baza przestrzeni liniowej

Chcemy minimalny zbiór niezależny: bo po co więcej (i ma wiele innych, dobrych własności).

Definicja 2.1 (Baza). B jest *bazą* przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ gdy $\mathrm{LIN}(B) = \mathbb{V}$ oraz B jest liniowo niezależny.

Alternatywnie, mówimy, że B jest *minimalnym zbiorem rozpinającym* $\mathbb{V}$.

Przykład 2.2.
- W przestrzeni $\mathbb{F}^n$ wektory (tzw. *baza standardowa*): $\vec{E}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{E}_2 = (0, 1, 0 \dots, 0)$, ..., $\vec{E}_{n-1} = (0, \dots, 0, 1, 0)$, $\vec{E}_n = (0, \dots, 0, 1)$.
- W przestrzeni wielomianów stopnia $\leq n$: wielomiany $\{x^i\}_{i=0}^n$.
- W przestrzeni ciągów o wyrazach w $\mathbb{F}$, które mają skończenie wiele niezerowych wyrazów: $\{e_i\}$, gdzie e_i ma 1 na i-tej pozycji i 0 wszędzie indziej.

  Ta baza jest nieskończona.

Interesują nas głównie przestrzenie, które mają skończoną bazę. Prawie wszystko, co powiemy, jest też prawdą ogólnie, ale dowody są dużo bardziej techniczne.

Definicja 2.3 (Przestrzeń skończenie wymiarowa). Przestrzeń jest *skończenie wymiarowa*, jeśli ma skończony zbiór rozpinający.

2.2 Wyrażanie wektora w bazie

Definicja 2.4 (Wyrażanie wektora w bazie). Jeśli $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ oraz $\vec{v} \in \mathbb{V}$ jest wektorem, to wyrażeniem wektora $\vec{v}$ w bazie B nazywamy reprezentację $\vec{v}$ jako

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i \ .$$

Przykład 2.5. Rozważmy bazę $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$; niech $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ będą wektorami bazy standardowej. Wtedy $\vec{E}_1 = (1, 1, 1) - (0, 1, 1)$, $\vec{E}_2 = (0, 1, 1) - (0, 0, 1)$~~(0, 1, −1)~~ i $\vec{E}_3 = (0, 0, 1)$.

Twierdzenie 2.6. *Każdy wektor ma jednoznaczne przedstawienie w bazie*

1) Każdy wektor z $\mathbb{V}$ ma przedstawienie w bazie

$$LIN(B) = \mathbb{V} \ni \vec{v}$$

$$v = \sum \alpha_i \vec{v}_i$$

z bazy

2) <u>jednoznaczne</u>

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_i - \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{v}_j = \vec{0} \qquad \alpha_1 \dots \alpha_k \quad \beta_1 \dots \beta_n$$

$$\sum (\alpha_i - \beta_i) \vec{v}_i = \vec{0}$$

któryś niezerowy ↯

Skoro każdy wektor można naturalnie wyrazić w bazie, to możemy uogólnić notację wektorową dla $\mathbb{F}^n$ na dowolne przestrzenie i bazy

Definicja 2.7 (Notacja: Wyrażanie wektora w bazie)**.** Jeśli $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ oraz $\vec{v} \in \mathbb{V}$ jest wektorem, to

$$(\vec{v})_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$(\vec{v})_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \end{bmatrix}$$

gdzie $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$. Liczby α_i to *współrzędne* wektora $\vec{v}$ w bazie B

Przykład 2.8. Kontynuując poprzedni przykład: dla bazy $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ mamy $(\vec{E}_1)_B = (1, -1, 0)$, $(\vec{E}_2)_B = (0, 1, -1)$ i $(\vec{E}_3)_B = (0, 0, 1)$. Używając tej reprezentacji łatwo pokazać, np. że dla $\vec{v} = (7, 4, 2)$ mamy $(\vec{v})_B = (7, -3, -2)$, bo

$$(\vec{v})_B = (7\vec{E}_1 + 4\vec{E}_2 + 2\vec{E}_3)_B = 7(\vec{E}_1)_B + 4(\vec{E}_2)_B + 2(\vec{E}_3)_B.$$

Zauważmy, że po wyrażeniu wektorów $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ w ustalonej bazie B możemy traktować je podobnie jak wektory z $\mathbb{F}^n$. W pewnym sensie to jest „dokładne" odwzorowanie.

$$(\vec{v} + \vec{u})_B = (\vec{v})_B + (\vec{u})_B$$

Definicja 2.9 (Izomorfizm przestrzeni liniowych)**.** Mówimy, że dwie przestrzenie $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ nad ciałem $\mathbb{F}$ są *izomorficzne*, jeśli istnieją bijekcje $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $\psi : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$, takie że $\varphi(\vec{v} +_{\mathbb{V}} \vec{v}') = \varphi(\vec{v}) +_{\mathbb{W}} \varphi(\vec{v}')$ oraz $\varphi(\alpha \cdot_{\mathbb{V}} \vec{v}) = \alpha \cdot_{\mathbb{W}} \varphi(\vec{v})$ i analogicznie dla ψ

Przykład 2.10.

- Przestrzeń wielomianów (o współczynnikach z $\mathbb{F}$) stopnia nie większego niż k oraz $\mathbb{F}^{k+1}$

$$\alpha_k x^k \quad \alpha_{k-1} x^{k-1} \; \dots \; \alpha_0 x^0$$

$$[\alpha_k \dots \alpha_0]$$

- Przestrzeń wielomianów (o współczynnikach z $\mathbb{F}$) oraz przestrzeń $\{f \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : |\{i \in \mathbb{N} : f(i) \neq 0\}|$ jest skończone$\}$ ciągów o wartościach w $\mathbb{F}$, takich że jedynie skończona liczba elementów ciągu jest niezerowa

Fakt 2.11. *Niech $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie izomorfizmem. Wtedy układ $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy układ $\{\varphi(\vec{v}_1), \ldots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ jest liniowo niezależny.* $\varphi(\vec{0})$ $\varphi(\underbrace{0\cdot\vec{v}}_{\vec{0}}) = 0\cdot\varphi(\vec{v}) = \vec{0}$ $\quad \sum\alpha_i v_i = 0 \Leftrightarrow \sum\alpha_i\varphi(v_i) = 0$

Twierdzenie 2.12. *Niech $\mathbb{V}$ nad $\mathbb{F}$ ma bazę n elementową. Wtedy $\mathbb{V}$ jest izomorficzna z $\mathbb{F}^n$.*

Dowolne dwie przestrzenie liniowe nad $\mathbb{F}$ mające bazy n elementowe są izomorficzne.

$\mathbb{V} \simeq \mathbb{F}^n \simeq \mathbb{W}$

· B - baza n-elementowa $\mathbb{V}$

$(\cdot)_B : \mathbb{V} \to \mathbb{F}^n$ izomorfizm

· różn.
· na
· hom.

← łatwe rachunki

Tak więc mając dowolny układ wektorów możemy wyrazić je w dowolnej bazie i zastosować na nich eliminację Gaußa. $\mathbb{F}^n$

Naszym celem jest pokazanie, że rozmiar bazy nie zależy od wyboru bazy, lecz jest własnością przestrzeni liniowej. $\mathbb{F}^m$ m-el. $\mathbb{V}$ n-el $\simeq \mathbb{F}^n$

Twierdzenie 2.13. *Każda przestrzeń (skończenie wymiarowa) $\mathbb{V}$ ma bazę.*

$\mathbb{R}^n$ *Każda baza przestrzeni (skończenie wymiarowej) $\mathbb{V}$ ma taką samą moc.* wymiar

Dowód dla zainteresowanych, nie przedstawiany na wykładzie, nie wymagany. W skrócie polega on na rozważeniu dwóch baz różnej mocy i iteracyjnym przekształceniu jednej w drugą przy użyciu Lematu Steinitza.

może być zależny

Lemat 2.14 (Lemat Steinitza o wymianie). *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, $A \subseteq \mathbb{V}$ liniowo niezależnym zbiorem wektorów, zaś B zbiorem rozpinającym $\mathbb{V}$. Wtedy albo A jest bazą, albo istnieje $\vec{v} \in B$ taki że $A \cup \{\vec{v}\}$ jest liniowo niezależny.*

A

$\cdot \, LIN(A)$

$\nearrow LIN(B) = \mathbb{V}$

1) $B \subseteq LIN(A)$

$\longrightarrow$ A - jest bazą $\quad \mathbb{V} = LIN(B) \subseteq LIN(A)$

2) $B \not\subseteq LIN(A)$

$\exists \, \vec{v} \in B \setminus LIN(A)$

$A \cup \{\vec{v}\} \Leftarrow$ liniowo niez ?

$\longrightarrow$ $\vec{0} = \sum \alpha_i \vec{v}_i + \alpha \vec{v} \qquad \alpha \neq 0$

$\alpha \vec{v} = \sum -\alpha_i \vec{v}_i \in LIN(A) \ni \vec{v} \quad \lightning$

Wnioski z Lematu Steinitza:

Lemat 2.15. *Każdy zbiór niezależny skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej* $\mathbb{V}$ *można rozszerzyć do bazy.* A $\mathbb{V}$

Lemat 2.16. *Jeśli* $\mathbb{V}$ *jest przestrzenia skończenie wyiarowa, to z każdego układu wektorów* $A \subseteq \mathbb{V}$ *można wybrać bazę przestrzeni* $\mathrm{LIN}(A)$.

$\emptyset \subset v_1$ A

2.3 Wymiar przestrzeni liniowej

Definicja 2.17 (Wymiar przestrzeni liniowej)**.** Dla przestrzeni skończenie wymiarowej $\mathbb{V}$ jej *wymiar* to moc jej bazy. Oznaczamy go jako $\dim(\mathbb{V})$.

$\dim(\mathbb{V})$ $\mathbb{R}^n$

Intuicja: to jest „n" w $\mathbb{R}^n$ (lub ogólnie n w $\mathbb{F}^n$).

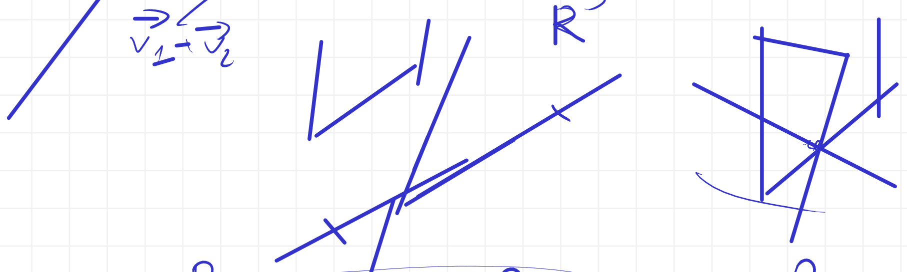
Wniosek 2.18. Każde dwie przestrzenie liniowe n-wymiarowe nad $\mathbb{F}$ są izomorficzne i są izomorficzne z $\mathbb{F}^n$.

$\mathbb{F}^n$

Lemat 2.19. *Jeśli* $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leq \mathbb{V}$ *są przestrzeniami skończenie wymiarowymi, to*

$$\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \underbrace{\dim(\mathbb{V}_1)}_{k+l} + \underbrace{\dim(\mathbb{V}_2)}_{k+m} - \underbrace{\dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)}_{k}.$$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ $\mathbb{R}^3$



k B – baza $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$

$k+l$ $B \cup B_1$ – baza $\mathbb{V}_1$

$k+m$ $B \cup B_2$ – baza $\mathbb{V}_2$

$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$

$B \cup B_1 \cup B_2$ $k+l+m$ baza

$$\underbrace{\sum_{b \in B} \overset{0}{\alpha_b} \vec{b} + \sum_{b_1 \in B_1} \overset{0}{\alpha_{b_1}} \vec{b}_1}_{\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2} = \underbrace{-\sum_{\vec{b}_2 \in B_2} \overset{0}{\alpha_{b_2}} \vec{b}}_{\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2} = \vec{0}$$

jednoznaczne przed. w B

$B \cup B_1$

$B \cup B_2$

$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$\mathrm{LIN}(B \cup B_1)$ $\mathrm{LIN}(B \cup B_2)$

Wzór ten służy głównie do liczenia wymiaru $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$:

Fakt 2.20. *Jeśli* B_1, B_2 *są bazami dla* $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leq \mathbb{V}$ *to*

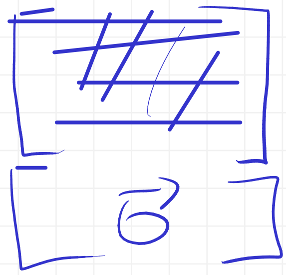
$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \mathrm{LIN}(B_1 \cup B_2)$$

W takim razie znamy $\dim(\mathbb{V}_1)$, $\dim(\mathbb{V}_2)$ i umiemy policzyć moc bazy $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$, czyli znamy wymiar $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Czyli umiemy policzyć wymiar $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. (Przykład w kolejnym rozdziale.)

2.4 Zastosowanie eliminacji Gaussa do liczenia wymiaru

Gdy mamy dany zbiór A (skończony), to aby policzyć $\dim(\mathrm{LIN}(A))$ możemy zastosować eliminację Gaussa: wiemy, że po zakończeniu otrzymujemy zbiór wektorów liniowo niezależnych oraz wektory zerowe i generowana przestrzeń jest taka sama. Czyli otrzymany zbiór wektorów liniowo niezależnych to baza a jej liczność to liczba wymiarów przestrzeni.

baza LIN(A)



LIN(A)

liniowo niez

Twierdzenie 2.21. *Eliminacja Gaussa zastosowana do układu wektorów U zwraca bazę* $\mathrm{LIN}(U)$ *(oraz wektory zerowe).*

LIN(A)

A ← można wybrać bazę LIN(A)

Fakt 2.22. *Jeśli po zakończeniu eliminacji Gaußa otrzymujemy zbiór złożony z k wektorów, to oryginalny zbiór zawierał dokładnie k wektorów niezależnych.*

Przykład 2.23. Rozważmy przestrzenie liniowe S, T, zadane jako $S = \mathrm{LIN}(\{(1, 6, 5, 5, 3), (1, 2, 3, 2, 2)\})$ oraz $T = \mathrm{LIN}(\{(3, 4, 5, 3, 3), (2, 1, 3, 1, 2)\})$. Obliczymy $\dim(S + T)$ oraz $\dim(S \cap T)$ i podamy bazę $S + T$.

Łatwo zauważyć, że podany zbiór generatorów S ma dwa wektory niezależne (są różne, a mają taką samą pierwszą współrzędną), podobnie T ma wymiar 2. Będziemy korzystać z zależności:

$$\overset{3}{\underline{\dim(S + T)}} = \overset{2}{\dim(S)} + \overset{2}{\dim(T)} - \overset{1}{\dim(S \cap T)}$$

Czyli wystarczy, że policzymy wymiar $S + T$. Suma (mnogościowa) generatorów S oraz T generuje $S + T$, zastosujemy metodę eliminacji Gaussa w celu obliczenia wymiaru; odpowiednie rachunki zostały już przeprowadzone w Przykładzie 1.23.

$\dim(S) = \dim(T) = 2$

$$\begin{matrix} 1&6&5&5&3 \\ 1&2&3&2&2 \\ 3&4&5&3&3 \\ 2&1&3&1&2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0&4&2&3&1 \\ 1&2&3&2&2 \\ 3&4&5&3&3 \\ 2&1&3&1&2 \end{matrix} \xrightarrow{3-1\cdot 4} \begin{matrix} 0&4&2&3&1 \\ 1&2&3&2&2 \\ 0&1&-1&0&-1 \\ 2&1&3&1&2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0&4&2&3&1 \\ 1&2&3&2&2 \\ 0&1&-1&0&-1 \\ 0&3&3&3&2 \end{matrix} \xrightarrow{1-3\cdot 4}$$

$$\begin{matrix} 0&0&0&0&0 \\ 1&2&3&2&2 \\ 0&1&-1&0&-1 \\ 0&3&3&3&2 \end{matrix} \Big\}\ \text{liniowo niez.}\ \dim = 3$$

Wymiar $\mathrm{LIN}(S+T)$ wynosi więc 3. Tym samym wymiar $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ wynosi 1.

Co do bazy $S + T$ zauważmy, że wektory uzyskane przez kombinacje liniowe generatorów $S + T$ (czyli naszych wektorów zapisanych w wierszach) dalej należą do $S + T$, tym samym trzy wektory

$$(1, 2, 3, 2, 2), (0, 1, -1, 0, -1), (0, 0, -6, -3, -5)$$

są bazą tej przestrzeni.

W eliminacji używaliśmy jedynie wektorów 2, 3, 4, tak więc odpowiednie wektory wejścia również są bazą, tj.:

$$(1, 2, 3, 2, 2), (3, 4, 5, 3, 3), (2, 1, 3, 1, 2)$$

są bazą $S + T$.

Przykład/Zastosowanie 2.24 (Rekurencje liniowe). Rekurencja na liczby Fibonacciego.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad f_1 = f_2 = 1. \qquad 1, 1, 2, 3, 5, 8 \ldots$$

$f_n = \alpha(\ldots)^n + \beta(\ldots)^n \ldots$

Jak rozwiązać takie równanie (podać postać zwartą). To może za proste, bo wszyscy znają.

Albo na coś podobnego.

$$(a_n + b_n) = (a_{n-1} + b_{n-1}) + 2(a_{n-2} + b_{n-2})$$

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (*) \tag{2.1}$$

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta$$

$(*)$ $(a_n)_{n \geq 0}$ sp. $(*)$ są przestrzenią liniową

(αa_n) sp $(*)$

$(a_n + b_n)_{n \geq 0}$ sp $(*)$

a° $(1, 0, \ldots)$ $\leq$

$a^{\circ\circ}$ $(0, 1, \ldots)$

$(\alpha, \beta, \ldots$

$\underline{\alpha \cdot a^{\circ} + \beta \cdot a^{\circ\circ}}$

$c \cdot n + d$

$c \cdot n + d = c \cdot (n-1) + d + 2(c \cdot (n-2) + d)$

$c n \qquad 2 \cdot c n$

$\lightning$

$\alpha \cdot x^n$

$x^n = x^{n-1} + 2 x^{n-2} \quad / : x^{n-2} \quad x \neq 0$

$x^2 = x + 2x$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\vdots$

$\underline{x_0, x_1}$ (x_0^n) (x_1^n) sp. $(*)$

$\underline{A (x_0)^n + B (x_1^n)} = (a_n)$

$$\begin{cases} A + B = \alpha & // 0 \\ A \cdot x_0 + B x_1 = \beta & // \end{cases}$$