Lista 1

Zadanie 1. Niech $\mathbb{V}$ — przestrzeń liniowa nad $\mathbb{F}$ oraz $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ będą jej podprzestrzeniami.

Pokaż, że $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$ oraz $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ są odpowiednio: największą przestrzenią liniową zawartą w $\mathbb{W}$ i $\mathbb{W}'$ oraz najmniejszą zawierającą $\mathbb{W}$ i $\mathbb{W}$.

Pokaż też, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, iloczyn kartezjański $\mathbb{V} \times \mathbb{V}'$ z dodawaniem i mnożeniem po współrzędnych, jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Zadanie 2. Sprawdź, czy następujące podzbiory $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami liniowymi:

1. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 0\}$
2. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
3. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
4. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
5. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 1\}$
6. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 0\}$
7. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 1\}$
8. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
9. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$

Zadanie 3. Pokaż wprost z definicji, że: U jest zbiorem liniowo zależnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim wektor $u \in U$, taki że

$$\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(U \setminus \{\vec{u}\}).$$

Pokaż też, że jeśli U nie zawiera wektora zerowego $\vec{0}$, to są przynajmniej dwa takie wektory $\vec{u}$.

Zaneguj obustronnie tę równoważność, aby uzyskać charakteryzację zbioru liniowo zależnego.

Zadanie 4. Przedstaw wektor $\vec{w}$ jako kombinację podanych wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (lub uzasadnij, że to niemożliwe), nad ciałem $\mathbb{R}$:

1. $\vec{w} = (1, 5)$, $\vec{v_1} = (1, 1)$, $\vec{v_2} = (2, 0)$.
2. $\vec{w} = (5, 10, 11)$, $\vec{v_1} = (1, 2, 3)$, $\vec{v_2} = (0, 3, 2)$, $\vec{v_3} = (1, 1, 1)$.
3. $\vec{w} = (5, 10, 11)$, $\vec{v_1} = (1, 2, 3)$, $\vec{v_2} = (0, 3, 2)$, $\vec{v_3} = (1, 8, 7)$.
4. $\vec{w} = (4, 17, 18)$, $\vec{v_1} = (1, 2, 3)$, $\vec{v_2} = (0, 3, 2)$, $\vec{v_3} = (3, 9, 11)$.

Zadanie 5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Z}_3^3$ (zbiór trzyelementowych ciągów elementów z $\mathbb{Z}_3$, nad ciałem $\mathbb{Z}_3$). Ile wektorów należy do $\mathrm{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 1))$? A ile do $\mathrm{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 2))$?

Zadanie 6. Pokaż równoważność następujących warunków (dla $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$):

- Zbiór B jest liniowo niezależny.
- Wektor $\vec{0}$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
- Pewien wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
- Każdy wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów z B.

Zaneguj powyższe warunki, aby uzyskać charakteryzację zbiorów liniowo zależnych.

Zadanie 7. Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$)? Rozszerz ich maksymalny podzbiór niezależny do bazy.

1. $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 1)$;
2. $(0, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 1, 1)$;
3. $(1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1), (0, 2, 1, 1), (0, 0, 1, 1)$;
4. $(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 2), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)$.

Zadanie 8. Rozważamy przestrzenie nad $\mathbb{R}$. Niech $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiory wektorów

- $\{\alpha\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2\}$
- $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_3 + \vec{v}_4, \ldots, \vec{v}_{n-1} + \vec{v}_n, \vec{v}_n + \alpha\vec{v}_1\}$

są liniowo niezależne?

Wskazówka: Można bezpośrednio z definicji, ale szybciej: zauważ, że $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ są bazą przestrzeni liniowej (jakiej). Można na nich zastosować eliminację Gauβa.

Zadanie 9. Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$ (będących podprzestrzeniami $\mathbb{V}$) zachodzi

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}') = 1 + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') \ .$$

Udowodnij, że suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest jedną z przestrzeni $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$, a przecięcie $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$—drugą.

Zadanie 10. Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ dla

- $S = \{(1,2,0,1),(1,1,1,0)\}$, $T = \{(1,0,1,0),(1,3,0,1)\}$;
- $S = \{(2,-1,0,-2),(3,-2,1,0),(1,-1,1,-1)\}$, $T = \{(3,-1,-1,0),(0,-1,2,3),(5,-2,-1,0)\}$.

Zadanie 11 (* Nie liczy się do podstawy.). *Uwaga: w tym zadaniu nie można korzystać z twierdzenia o równoliczności baz ani z lematu o wymianie.*

Używając eliminacji Gauβa udowodnij następujące twierdzenie:
Jeśli $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, to zbiór liczący $k+1$ wektorów jest liniowo zależny.

W tym celu wyraź wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k+1}$ w bazie B i przeprowadź na tej reprezentacji eliminację Gauβa.

Wywnioskuj z tego twierdzenia, że każde dwie bazy przestrzeni skończenie wymiarowej są równoliczne.