## 2.5 Warstwy

**Definicja 2.25** (Warstwa)**.** Dla przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ i jej podprzestrzeni liniowej $\mathbb{W}$ zbiór $U$ jest *warstwą* $\mathbb{W}$ w $\mathbb{V}$, jeśli jest postaci

$$U = u + \mathbb{W} = \{u + w \ : \ w \in \mathbb{W}\} \ .$$

Zauważ, że warstwy zwykle *nie są* przestrzeniami liniowymi.

*Przykład* 2.26.

1. Dla podprzestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ takiej że trzecia współrzędna to 0, warstwami są zbiory wektorów o ustalonej trzeciej współrzędnej.

2. Dla zbioru wektorów spełniających równanie $2x_1 - x_3 = 0$ każda warstwa składa się z wektorów, dla których $2x_1 - x_3$ ma ustaloną wartość.

3. Dla przestrzeni liniowej wielomianów i podprzestrzeni składającej się z wielomianów zerujących się w 2 i 4, warstwy składają się z wektorów o ustalonej wartości w 2 i 4.

**Lemat 2.27.** *Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq \mathbb{V}$. Następujące warunki są równoważne:*

1. *istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$*

2. *istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$*

3. *dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zachodzi $U = \vec{u} + \mathbb{W}$.*

*Ponadto, następujące warunki są równoważne:*

1. *istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową;*

2. *istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową;*

3. *dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zbiór $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową.*

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Pod wieloma względami warstwy są podobne do podprzestrzeni liniowych:

**Lemat 2.28.** *Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś $U$ i $U'$ jej warstwami. Wtedy*

$$U = U' \quad \text{lub} \quad U \cap U' = \emptyset \ .$$

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

**Lemat 2.29.** *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, zaś $U$ i $U'$ warstwami jakichś (niekoniecznie takich samych) podprzestrzeni $\mathbb{V}$.*

*Wtedy przecięcie $U \cap U'$ jest puste lub jest warstwą (jakiejś podprzestrzeni).*

**Lemat 2.30** (Wypukłość warstw)**.** *Załóżmy, że ciało $\mathbb{F}$ spełnia $1 + 1 \neq 0$.*

*Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$, zaś $U \subseteq \mathbb{V}$. Wtedy następujące warunki są równoważne*

1. *$U$ jest warstwą (odpowiedniej przestrzeni liniowej)*
2. $\forall_{\alpha \in \mathbb{F}, \vec{v}, \vec{u} \in U} \quad \alpha\vec{v} + (1 - \alpha)\vec{u} = \vec{u} + \alpha(\vec{v} - \vec{u}) \in U$

Intuicja: na płaszczyźnie to są punkty na prostej wyznaczonej przez $\vec{u}, \vec{v}$.

*Przykład/Zastosowanie* 2.31 (Kontynuacja Przykładu 2.24). Chcemy zająć się ponownie rekurencjami, tym razem „prawie liniowymi”, np.

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - 1.$$

Łatwo sprawdzić, że zbiór rozwiązań *nie jest* przestrzenią liniową. Ale z Lematu 2.30 łatwo wynika, że jest on warstwą jakiejś przestrzeni liniowej. Z Lematu 2.27 różnica dwóch elementów z warstwy jest w odpowiadającej przestrzeni liniowej.

Tu są dwa możliwe podejścia.

- Szukamy dobrego wektora.

- Nie szukamy jednego wektora, lecz dla konkretnego ciągu dobieramy indywidualnie.

# Rozdział 3

# Przekształcenia liniowe

## 3.1 Przekształcenia liniowe

**Definicja 3.1** (Przekształcenie liniowe). Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$. Funkcja $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ jest *przekształceniem liniowym*, jeśli spełnia następujące warunki:

- $\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V}}\forall_{\alpha\in\mathbb{F}} F(\alpha\vec{v}) = \alpha F(\vec{v})$
- $\forall_{\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{V}} F(\vec{v}+\vec{w}) = F(\vec{v}) + F(\vec{w})$

Alternatywną nazwą dla „przekształcenie liniowe” jest *homomorfizm*

*Przykład* 3.2.
- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: suma współrzędnych.

  $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto \sum x_i$

- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: przemnożenie wszystkich współrzędnych przez stałą.
- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ usunięcie $i$-tej współrzędnej.
- Pochodna wielomianu — jako funkcja przestrzeni liniowej wszystkich wielomianów (o współczynnikach z $\mathbb{R}$) w nią samą.

  $\sum a_i x^i \to \sum i \cdot a_i x^{i-1}$

- $F : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$, $F(x, y, z) = (2x + y, y - 3z)$.

- Całka (określona), tj. dla wielomianów ze współczynnikami z $\mathbb{R}$ przekształcenie $(F(f))(x) = \int_0^x f(y)\mathrm{d}y$.

- $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = xy$ nie jest przekształceniem liniowym.

$F(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 xy$

- $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (y + 3, x - 2)$ nie jest przekształceniem liniowym.

$0,0 \to 0,-2$

Na zbiorze przekształceń liniowych z $\mathbb{V}$ w $\mathbb{W}$ możemy w naturalny sposób zdefiniować dodawanie i mnożenie (przez skalar) „w punkcie":

$$(F + G)(\vec{v}) = F(\vec{v}) + G(\vec{v})$$
$$(\alpha F)(\vec{v}) = \alpha F(\vec{v})$$

**Lemat 3.3.** *Zbiór przekształceń liniowych jest przestrzenią liniową.*

$-F$

$$\begin{aligned}(F+G)(\alpha v) &= F(\alpha v) + G(\alpha v)\\ &= \alpha F(v) + \alpha \cdot G(v)\\ &= \alpha(F(v) + G(v))\\ &= \alpha \cdot \underline{(F+G)}(v)\end{aligned}$$

**Fakt 3.4.** *Złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.*

$$F(G(\alpha v)) = F(\alpha G(v)) = \alpha F(G(v))$$

$$F(v) = Fv$$

**Lemat 3.5.** *Każde przekształcenie liniowe jest jednoznacznie zadane poprzez swoje wartości na bazie. Każde takie określenie jest poprawne.*

$$F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

$\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ – baza $\mathbb{V}$

1) $F$ jest wyzn. przez $F(\vec{b}_1) \ldots F(\vec{b}_n)$

dow: $\vec{v} = \sum \alpha_i \vec{b}_i$

$$F\left(\sum \alpha_i \vec{b}_i\right) = \sum \alpha_i F(\vec{b}_i)$$

2) każde takie zadanie jest popr.

$F(v)$

• tak zadane $F$ powinno być liniowe

$F(\alpha v) = \alpha \cdot F(v)$ $\qquad v = \sum \alpha_i \vec{b}_i$

$\sum \alpha\alpha_i F(\vec{b}_i) = \alpha \cdot \sum \alpha_i F(b_i)$ $\qquad \alpha v = \sum \alpha\alpha_i \vec{b}_i$ ← jedyne

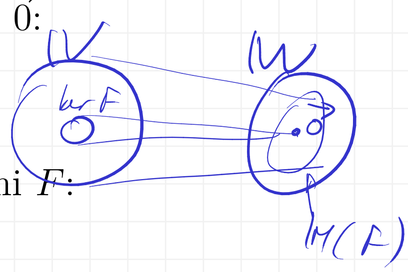
$F(u+v) = F(u) + F(v)$

## 3.2 Jądro i obraz przekształcenia liniowego

**Definicja 3.6** (Jądro i obraz przekształcenia liniowego)**.** Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą przestrzeniami linowymi, $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ przekształceniem liniowym.

*Jądro przekształcenia* to zbiór wektorów przekształcanych na $\vec{0}$:

$$\ker F = \{\vec{v} : F(\vec{v}) = \vec{0}\} .$$



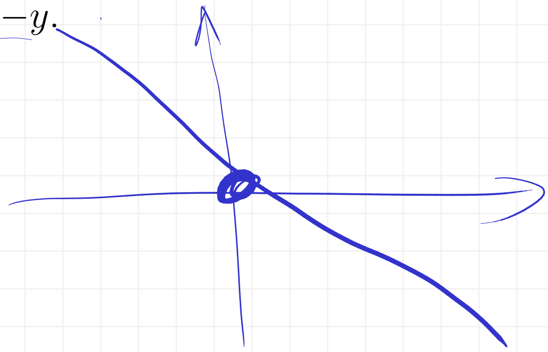

*Obraz przekształcenia* to zbiór wektorów, które są wartościami $F$:

$$\mathrm{Im}(F) = \{\vec{u} : \exists \vec{v} F(\vec{v}) = \vec{u}\} .$$

*Przykład* 3.7.
- dla operacji różniczkowania i przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 5, obrazem jest przestrzeń wielomianów stopnia niewiększego niż 4 a jądrem przestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż 0.

- dla operacji całkowania przestrzeni wielomianów stopnia obrazem jest przestrzeń wielomianów stopnia różnego niż 0, a jądrem: wielomian zerowy.

- Dla przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x + y$ obrazem jest cała prosta $\mathbb{R}$ a jądrem prosta $x = -y$.



**Lemat 3.8.** *Jądro i obraz są przestrzeniami liniowymi.*

$\vec{0} \in \ker(F) \subseteq \mathbb{V}$

$F: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$

$F(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot F(v)$

$\alpha = 0$

$F(\vec{0}) = 0 \cdot F(v) = \vec{0}$

zamkniętość na op.

- $v, v'$

$F(\vec{v}) = \vec{0}$

$F(\vec{v}') = 0$

$F(\vec{v} + \vec{v}') = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ ✓

$F(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \circ F(\vec{v}) = \alpha \circ \vec{0} = \vec{0}$

- $\vec{0} \in \operatorname{Im} F \subseteq \mathbb{W}$

$w, w' \in W$

$\overset{\shortparallel}{F(v)}$ $\overset{\shortparallel}{F(v')}$ $v, v' \in \mathbb{V}$

$F(v + v') = F(v) + F(v') = w + w' \in \operatorname{Im} F$

$\alpha w = F(\alpha v)$ ✓

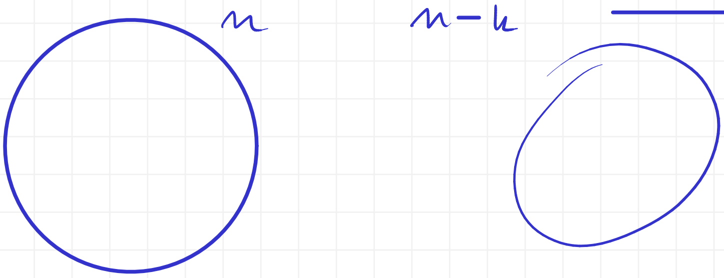
**Fakt 3.9.** *Jeśli* $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *jest przekształceniem liniowym oraz* $\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathbb{V}$ *to* $\mathrm{Im}(F) \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} \mathrm{LIN}(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_k))$.

$F(v) = F(\sum \alpha_i \cdot \vec{v}_i) = \sum \alpha_i F(v_i)$

$\in LIN(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$

**Twierdzenie 3.10.** *Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym, gdzie $\mathbb{V}, \mathbb{W}$: skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe. Wtedy*

$$\underbrace{\dim(\mathbb{V})}_{n} = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(F))}_{n-k} + \underbrace{\dim(\ker(F))}_{k}.$$



$k \leq n$

$n-k$

$\mathbb{V}$

$\cdot$ $\ker F \leqslant \mathbb{V}$ baza $\ker F$ $v_1, \dots, v_k$ ← baza jądra

niez. w $\mathbb{V}$

$\underbrace{\overbrace{v_1, \dots, v_k}^{k}, v_{k+1}, \dots, v_n}$ → baza $\mathbb{V}$

twierdzę, że $\underbrace{F(v_{k+1}), \dots, F(v_n)}_{n-k}$ – baza $\mathrm{Im}\, F$

1) generowanie $\mathrm{Im}\, F = LIN(\underbrace{F(v_1), \dots, F(v_k)}_{\vec{0}}, F(v_{k+1}), \dots F(v_n))$

$= LIN(F(v_{k+1}), \dots, F(v_n))$

baza ?

Niezależność ↓

$\vec{0} = F\underbrace{\left(\sum_{i=k+2}^{n} \alpha_i v_i - v_{k+1}\right)}_{\in \ker F}$ ↯

$\sum_{i=k+2}^{n} \alpha_i v_i - v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$

*Uwaga.* Dowód Twierdzenia 3.10 *nie zadziała*, jeśli weźmiemy na początku dowolną bazę $\mathbb{V}$, np. wszystkie wektory mogą przejść w to samo!

**Definicja 3.11.** *Rząd przekształcenia liniowego* $F$ to $\mathrm{rk}(F) = \dim(\mathrm{Im}(F))$.

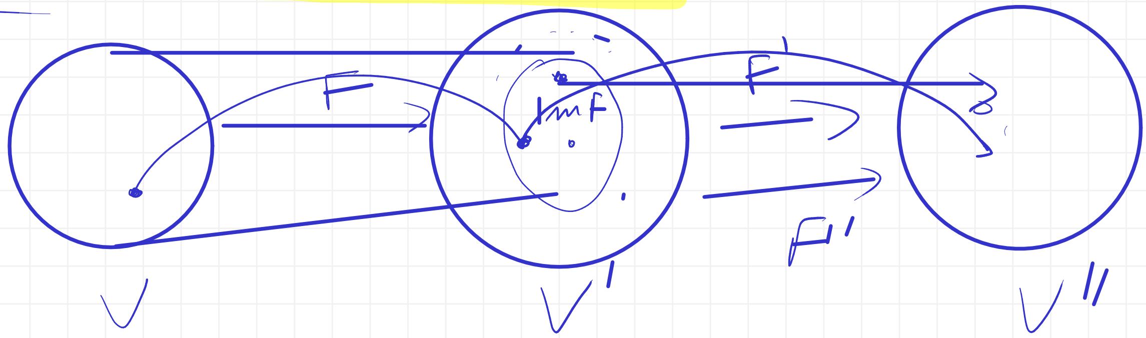
$\dim \mathbb{V} \geqslant \mathrm{rk}\, F$

$\dim \mathrm{Im}\, F \leq \dim W$

**Fakt 3.12.** *Jeśli* $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *to* $\mathrm{rk}(F) \leq \min(\dim(\mathbb{V}), \dim(\mathbb{W}))$ $\mathrm{Im}\, F \leqslant W$

**Fakt 3.13.** *Jeśli $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ oraz $F' : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$ są przekształceniami liniowymi, to*

$$\mathrm{rk}(F'F) \leq \min(\mathrm{rk}(F), \mathrm{rk}(F')).$$




$\mathrm{Im}\, F'F \subseteq \mathrm{Im}\, F'$

$rk(F'F) \leq rk(F')$

$rk(F) \geq rk(F'F)$

$F'' = F' \upharpoonright_{\mathrm{Im}\, F}$ $\quad F' : \mathrm{Im}\, F \to V''$

$\mathrm{Im}(F'F) = \mathrm{Im}(F''F)$

$\mathrm{Im}\, F'F \subseteq \mathrm{Im}\, F'' = \quad F''(v) = F''F(v)$

$v \in \mathrm{Im}\, F$

$F(u)$

$\mathrm{Im}(F'F) = \mathrm{Im}\, F''$

$rk\, F'F = rk\, F'' \leq \underbrace{\dim(\mathrm{Im}\, F)}_{rk(F)} = rk\, F$

# Rozdział 4

# Macierze

**Definicja 4.1.** Macierzą $M$ rozmiaru $m \times n$ nad ciałem $\mathbb{F}$ nazywamy funkcję $M : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \to \mathbb{F}$.

Zbiór wszystkich macierzy rozmiaru $m \times n$ nad ciałem $\mathbb{F}$ oznaczamy przez $M_{m,n}(\mathbb{F})$.

Zwykle macierz rozmiaru $m \times n$ oznaczamy jako tabelę:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} .$$

$a_{133}$

(Typem nawiasów za bardzo się nie przejmujemy). Zauważmy, że indeksy są zapisywane odwrotnie, niż w przypadku współrzędnych na płaszczyźnie.

Dla macierzy piszemy też $(A)_{ij}$ na oznaczenie $a_{ij}$ i używamy podobnych konwencji. Gdy rozmiar macierzy nie jest jasny lub jest nieistotny, zapisujemy macierz jako $(a_{ij})$

Dla zwiększenia czytelności w zapisie macierzy używamy też przecinków między elementami $a_{ij}$, nawiasów okrągłych zamiast kwadratowych, przecinków między indeksami w $a_{i,j}$ itp.

## 4.1 Podstawowe operacje na macierzach

**Definicja 4.2.** Dodawanie macierzy określone jest po współrzędnych, tzn. dodawanie $A+B$ jest określone wtedy i tylko wtedy, gdy $A, B$ są tego samego rozmiaru i wtedy

$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&1\\-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3\\1&7\end{bmatrix}$

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} \quad .$$

Mnożenie przez skalar również określone jest po współrzędnych, tzn. dla macierzy $A = (a_{ij})$ nad ciałem $\mathbb{F}$

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij} \quad .$$

Tym samym macierze stanowią przestrzeń liniową (nad odpowiednim ciałem). Wektorem zerowym jest macierz złożona z samych zer.

### 4.1.1 Ważne i ciekawe macierze

*Przykład* 4.3. W poniższym przykładzie domyślnie zajmujemy się macierzami rozmiaru $m \times n$

1. *macierz zerowa*

$\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$ $\quad 0 \quad [0] \quad [\ ]$

2. macierz $\mathbf{1}_{ij}$

$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix}0 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 0\end{bmatrix}\end{array}$

(Macierz ta zwana czasem *macierzą indykacyjną*, ale to nie jest dobra nazwa).

3. *macierz kwadratowa*

$n \times n$ $\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots\end{bmatrix}$

4. *macierz przekątniowa* macierz kwadratowa, która ma same zera poza przekątną $(a_{ii})_{i=1,\ldots,n}$.

$\begin{bmatrix}3&&&\\&1&&\\&&7&\\&&&2\end{bmatrix}$

5. *macierz identycznościowa/jednostkowa*

$n\times n$ $\quad I_n \quad Id_n \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots\ 1 \end{bmatrix}}_{n\times n} \Big\} n$

6. *macierz górnotrójkątna*

$\begin{bmatrix} \ddots & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$ $\qquad a_{ij}=0$ gdy $i>j$

7. *macierz dolnotrójkątna*

$\begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$ $\qquad a_{ij}=0$ gdy $i<j$

8. *macierz trójkątna*

### 4.1.2 Zestawianie macierzy

Mając dwie macierze $M, M'$ rozmiaru $m \times n$ oraz $m \times n'$ (nad tym samym ciałem) będziemy pisać

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ $\qquad m\times(n+n')$

$$[M|M']$$

na macierz rozmiaru $m \times (n + n')$ uzyskaną przez „zestawienie” macierzy $M, M'$. Rozszerzamy tę konwencję na wiele macierzy $M_1, M_2, \dots, M_k$ rozmiaru $m \times n_1$, $m \times n_2$, ..., $m \times n_k$ i piszemy $[M_1|M_2|\cdots|M_k]$. Jeśli macierze te są wymiaru $m \times 1$ to zwykle używamy liter $C_1, \dots, C_k$, jako że są to kolumny wynikowej macierzy.

Podobnie zestawiamy macierze w pionie: dla macierzy $M, M'$ rozmiaru $m \times n$ i $m' \times n$ piszemy $\dfrac{1\ 2}{3\ 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad (m+m')\times n$

$$\left[\frac{M}{M'}\right]$$

na „zestawienie” tych dwóch macierzy w pionie (w tym wypadku jest ono rozmiaru $(m + m') \times n$). Ponownie używamy tej notacji dla wielu macierzy $M_1, M_2, \dots, M_k$, jeśli macierz mają tylko jeden wiersz to zwykle oznaczamy je jako $R_1, R_2, \dots, R_m$ (bo są to wiersze).

### 4.1.3 Mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy zdefiniujemy najpierw dla macierzy $1 \times n$ oraz $n \times 1$.

$$\underset{1\times n}{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}} \cdot \overset{m\times 1}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ .$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3+2+1=6$$

Wynik, w zależności od potrzeb, traktujemy jako liczbę (z ciała $\mathbb{F}$) lub jako macierz $1 \times 1$.

$1\times 1$

Mnożenie wektorów $m \times 1$ oraz $1 \times n$ definiujemy jako:

$m \times n$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_ma_1 & b_ma_2 & \cdots & b_ma_n \end{array}\right] .$$

$b_1 \cdot$ $b_2 \cdot 2$

Następnie rozszerzamy mnożenie do macierzy rozmiaru $m \times k$ i $k \times n$ (wynikiem jest macierz rozmiaru $m \times n$). Mnożenie definiujemy tak, że dzielimy lewą macierz na wiersze a prawą na kolumny i mnożymy jak dwa wektory (odpowiednio: wierszy i kolumn), przy czym pojedyncze mnożenie wiersza i kolumny wykonujemy jak mnożenie wektorów.

dł. k wys. k

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 & -2+14 \\ -4+3 & 2+21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline \vdots \\ \hline R_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \,|\, C_2 \,|\, \cdots \,|\, C_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} R_1C_1 & R_1C_2 & \cdots & R_1C_n \\ \hline R_2C_1 & R_2C_2 & \cdots & R_2C_n \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline R_mC_1 & R_mC_2 & \cdots & R_mC_n \end{array}\right] .$$

Używając notacji z indeksami, jeśli $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,k}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$, to $C = AB$ ma postać $(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, gdzie

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} \ .$$

*Uwaga.* Zauważmy, że możliwy jest też odwrotny podział: lewa macierz jako wektor kolumn a prawa jako wektor wierszy. Wykonując bezpośrednie rachunki można łatwo sprawdzić, że wynik jest ten sam.

**Fakt 4.4.** *Mnożenie macierzy jest łączne.*

$(A \cdot B) \cdot C = A(BC)$

**Fakt 4.5.** *Niech $A, B, C$ będą macierzami nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, $\mathrm{Id}_n$ macierzą identycznościową $n \times n$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Wtedy poniższe równości zachodzą, dla macierzy odpowiednich rozmiarów (tzn. takich, że odpowiednie mnożenie/dodawanie jest określone):*

1. $\mathrm{Id}_n A = A$, $B \,\mathrm{Id}_n = B$;
2. $A(B + C) = AB + BC$;
3. $(B + C)A = BA + CA$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
5. $A[B|C] = [AB|AC]$;
6. $\left[\frac{B}{C}\right] A = \left[\frac{BA}{CA}\right]$.

Dowód sprowadza się do prostych rachunków i zostanie pokazany na ćwiczeniach.

*Przykład/Zastosowanie* 4.6. Jak obliczać wyrazy ciągu Fibonacciego szybko?

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^n \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & \boxed{f_{n+1}} \end{bmatrix}$$

$M^n$ szybkie pot. $O(\log n)$ op.

### 4.1.4 Transpozycja

**Definicja 4.7** (Transpozycja)**.** Dla macierzy $M = (m_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$ macierz $M^T$ zdefiniowana jest jako

$$M^T = (m_{ji})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T$$

to jest jako „obrót” wokół przekątnej.

*Przykład* 4.8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

**Lemat 4.9.** *Dla macierzy $M, N$ odpowiednich rozmiarów zachodzi*

$$(M + N)^T = M^T + N^T \ ,$$

$m \times k, \ k \times n$

$$(MN)^T = N^T M^T \ ,$$

$k \times m \quad n \times k$

$$(M^T)^T = M \ .$$

Prosty dowód zostanie pokazany na ćwiczeniach.

## 4.2 Wartości na wektorach jednostkowych

Zdefiniujmy macierze rozmiaru $n \times 1$ (wektory) $\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_n$, wektor $\vec{E}_i$ ma 1 na $i$-tej współrzędnej oraz 0 wszędzie poza tą pozycją (czyli inne spojrzenie na bazę standardową).

**Lemat 4.10** (Bardzo ważny)**.**

$M \cdot \vec{E}_i$

$$M = \left[\, M\vec{E}_1 \,\middle|\, M\vec{E}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, M\vec{E}_n \,\right]$$

Bezpośrednio

$$Id_n = [E_1 | E_2 | \ldots | E_n]$$

$$M\, Id_n = M$$

$$M[E_1 | E_2 | \ldots | E_n] = [\underbrace{ME_1} | \underbrace{ME_2} | \ldots | \underbrace{ME_n}] = M$$

*Uwaga.* To jest bardzo użyteczna własność: często zamiast pokazać równość macierzy czy też pomnożyć jakieś macierze będziemy liczyli wartości na wektorach $\vec{E}_i$.

*Przykład/Zastosowanie* 4.11 (Kontynuacja Zastosowania 4.6). W pewnym sensie możemy też powiedzieć, skąd wzięliśmy macierz $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ służącą do liczenia wartości wyrazów ciągu Fibonacciego: ma mieć ona własność, że przekształca wektor $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ na $\begin{bmatrix}b\\a+b\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}f_n\\f_{n+1}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}f_{n+1}\\f_{n+2}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} =$

$M\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\a+b\end{bmatrix}$

$M\overset{E_1}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Leftarrow$ I kol

$ME_2 = M\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Leftarrow$ II kol

$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_n\\f_{n+1}\end{bmatrix}$

## 4.3 Operacje elementarne

**Definicja 4.12** (Operacje elementarne.). Operacje elementarne (kolumnowe) to:

- zamiana kolumn;
- dodanie do jednej z kolumn wielokrotności innej;
- przemnożenie kolumny przez niezerowy skalar.

Analogicznie definiujemy operacje elementarne wierszowe.

Operacje elementarne można wyrazić jako macierze:

- macierz $T_{ij}$ ma następujące wyrazy: na przekątnej 1, poza $ii, jj$, gdzie $T_{ij}$ ma