Lista 2

Zadanie 1. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq \mathbb{V}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. istnieje wektor $u \in \mathbb{V}$, taki że $U = u + \mathbb{W}$;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U = u + \mathbb{W}$;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zachodzi $U = u + \mathbb{W}$.

Udowodnij też równoważność poniższych warunków:

1. istnieje wektor $u \in \mathbb{V}$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zbiór $U - u$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś U i U' jej warstwami. Pokaż, że

$$U = U' \quad \text{lub} \quad U \cap U' = \emptyset \ .$$

Możesz skorzystać z Zadania 1, nawet jeśli nie potrafisz go udowodnić.

Zadanie 3. Wyznacz bazę obrazu dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

- $F(x, y, z) = (2x + y, 3x - z, 5x + y - z, -2x + 2y - 2z)$;
- $G(x, y, z) = (x + y, y - 2z, 3z, x - y)$;
- $H(x, y, z) = (x + y, y + z)$;

Wskazówka: Możesz skorzystać z faktu: jeśli $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathbb{V}$ to $\mathrm{LIN}(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_k)) = \mathrm{Im}\, F$.

Zadanie 4. Które z poniższych przekształceń są liniowe (dziedzinami i przeciwdziedzinami przekształceń są przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednich n)?

- $L(x, y) = (2x - y, x + 3y - 1, 5x + 2y)$,
- $L'(x, y, z) = (3x + 5y - 2z, 2x - y)$,
- $L''(x, y, z) = (x \cdot y + z, -2x - z, -2y - z)$.

Dla tych z powyższych przekształceń, które są liniowe, znajdź ich rzędy oraz podaj bazy jądra i obrazu.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś $F : \mathbb{V} \to \mathbb{F}$ niezerowym (tj. istnieje $\vec{v} \in \mathbb{V}$ takie że $F(\vec{v}) \neq \vec{0}$) przekształceniem liniowym (takie przekształcenia nazywamy *funkcjonałami liniowymi*).

- Jaki jest wymiar jądra $\ker F$?
- Ustalmy dowolny wektor $\vec{w} \in \mathbb{V} \setminus \ker F$. Pokaż, że $\mathrm{LIN}(\ker F \cup \{\vec{w}\}) = \mathbb{V}$.
- Niech F, G będą dowolnymi funkcjonałami liniowymi na $\mathbb{V}$ o tym samym jądrze, tj. $\ker F = \ker G$. Korzystając z poprzedniego punktu pokaż, że wtedy istnieje $\beta \in \mathbb{F}$, taka że $F = \beta G$.

Zadanie 6. Rozważmy przestrzeń wielomianów o stopniu najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ oraz przekształcenie liniowe zdefiniowane jako suma pierwszej i drugiej pochodnej, tj.:

$$F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2} \ ,$$

gdzie $i(i-1)x^{i-2}$ dla $i < 2$ oznacza 0.

Podaj bazy jądra $\ker F$ i obrazu $\mathrm{Im}\, F$ tego przekształcenia. Podaj ich wymiary.

Wskazówka: Możesz skorzystać ze wskazówek do Zadania 3 i Zadania **??**.

Zadanie 7. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- F jest różnowartościowe;
- $\dim(\ker(F)) = 0$;
- $\ker(F)$ składa się z jednego wektora;
- $\dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(\mathbb{V})$.

Zadanie 8 (* Nie liczy się do podstawy, choć nie jest takie trudne). Załóżmy, że dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachodzi $L^3(\vec{v}) = \vec{0}$, dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy również $L^2(\vec{v}) = \vec{0}$, dla każdego wektora v.

Udowodnij uogólnienie tego faktu:
Jeśli dla $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz pewnego $k > n$ zachodzi $L^k(\vec{v}) = \vec{0}$ dla dowolnego wektora $\vec{v}$, to zachodzi również $L^n(\vec{v}) = \vec{0}$.

Wskazówka: Rozważ wektory $\vec{v}, L(\vec{v}), L^2(\vec{v}), \dots, L^n(\vec{v})$. Są one liniowo zależne.

Zadanie 9. Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalara α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierze identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynkę oraz zera w innych miejscach):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Id} \cdot A = A \quad B \cdot \mathrm{Id} &= B \\
A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\
(A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\
\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B &= A \cdot (\alpha B) \\
A[B|C] &= [AB|AC] \\
\left[\frac{B}{C}\right] A &= \left[\frac{BA}{CA}\right]
\end{aligned}
$$

Zadanie 10. Podaj zwartą postać macierzy (nad $\mathbb{R}$)

$$
\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n .
$$

Postać zwarta nie zawiera sum, wielokropków itp.

Zadanie 11. Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$)

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} .
$$