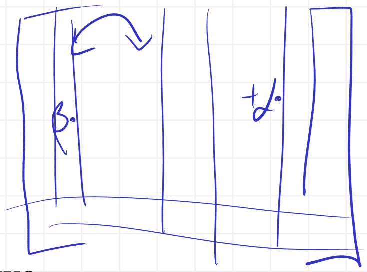
WYKŁAD 3

4.3 Operacje elementarne

Definicja 4.12 (Operacje elementarne.). Operacje elementarne (kolumnowe) to:

- zamiana kolumn;
- dodanie do jednej z kolumn wielokrotności innej;
- przemnożenie kolumny przez niezerowy skalar.



Analogicznie definiujemy operacje elementarne wierszowe.

Operacje elementarne można wyrazić jako macierze:

- macierz T_{ij} ma następujące wyrazy: na przekątnej 1, poza ii, jj, gdzie T_{ij} ma 0, oprócz przekątnej ma same 0, poza ij, ji, gdzie ma 1.

$M \to M'$

$M' = M$

$$T_{3,6} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & 1 & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & 0 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- $\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij}$

$$\mathrm{Id}_7 + 3 \cdot 1_{3,6} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & 3 & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- $D_{i\alpha}$ to macierz przekątniowa, która na pozycji ii ma $\alpha \neq 0$ a pozostałe elementy na przekątnej to 1.

$$D_{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Lemat 4.13 (Operacje elementarne jako macierze).

- *$M \cdot T_{ij}$ to macierz powstała przez zamianę i-tej oraz j-tej kolumny.*

- $M \cdot (\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij})$ *to macierz powstała przez dodanie do j-tej kolumny α razy i-tej kolumny.*
- $M \cdot (D_{i\alpha})$ *to macierz powstała przez przemnożenie i-tej kolumny przez α .*

W szczególności:

- $T_{ij} \cdot T_{ij} = \mathrm{Id}$
- $(\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij}) \cdot (\mathrm{Id}_n - \alpha 1_{ij}) = \mathrm{Id}_n$
- $D_{i\alpha} D_{i1/\alpha} = \mathrm{Id}_n.$

Jak to pokazać

$$A = [\, A_1 | A_2 | \cdots | A_n \,] \qquad A_i = A E_i$$

$$M' \vec{E}_k = M(\underbrace{T_{ij}\, \vec{E}_k}) =$$

1° $k \notin \{i,j\}$ $\quad \underbrace{T_{ij}}\, \vec{E}_k = \vec{E}_k$

$$M T_{ij} \vec{E}_k = M E_k \to k\text{-ta kol } M$$

$$M' E_i = M \underbrace{T_{ij}\, \vec{E}_i}_{\vec{E}_j} = M E_j \to j\text{-ta kol } M$$

i-ta kol T_{ij}

$$M' E_j = M T_{ij} E_j = \quad i\text{-ta kol. } M$$

zamienione i-ta oraz j-ta kol.

$$((M T_{ij}) T_{ij}) = M \quad \text{dla każdej macierzy}$$

$$T_{ij} T_{ij} = Id$$

Dla pozostałych tych macierzy

$$(M \cdot (Id + \alpha 1_{ij})) E_k = \underbrace{M E_k}_{k\text{-ta kol } M} + \underbrace{\alpha \cdot M 1_{ij} E_k}$$

$$1_{ij} E_k = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ E_i & k = j \end{cases}$$

$$\alpha \cdot M 1_{ij} E_k = \alpha \cdot \underbrace{M E_i}_{i\text{-ta kol } M}$$

Dla E_j

$$M E_j + \alpha M E_i$$

$$(Id + \alpha 1_{ij})(Id - \alpha 1_{ij})$$

Analogiczną interpretację można uzyskać też dla operacji wierszowych:

Lemat 4.14. *1. Dla M odpowiedniego rozmiaru $T_{ij}M$ jest macierzą powstałą z M przez zamianę i-tego oraz j-tego wiersza.*

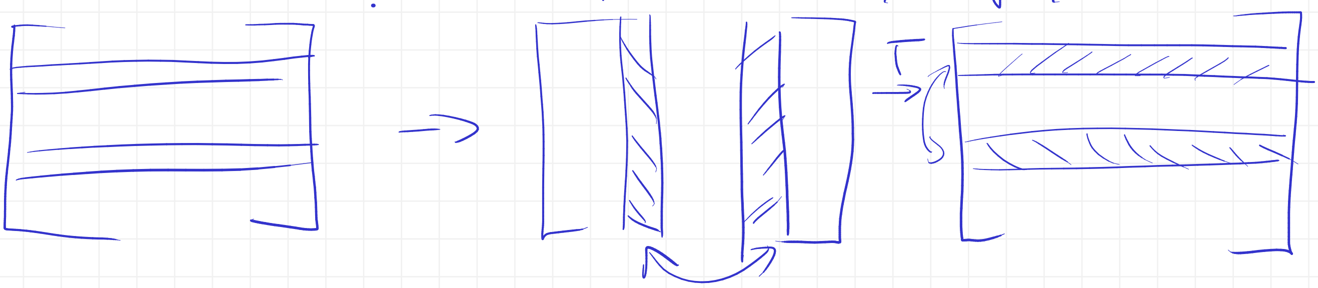
2. Dla M odpowiedniego rozmiaru $(\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij})M$ jest macierzą powstałą z M poprzez dodanie do i-tego wiersza α razy j-tego wiersza.

3. Dla M odpowiedniego rozmiaru $(D_{i\alpha}) \cdot M$ to macierz powstała przez przemnożenie i-tego wiersza M przez α .

Zwróćmy uwagę, że dla macierzy $\mathrm{Id} + \alpha 1_{ij}$ zmienia się, który wiersz dodajemy do którego (w porównaniu z kolumnami). (Nie będzie to jednak istotne, zwykle używamy tylko, że taką operację da się wykonać macierzami tego typu.)

d-d z transpozycji

$$(T_{ij}M)^{TT} = (\underbrace{M^T T_{ij}}_{M^T \text{ z zam } i\text{-tą oraz } j\text{-tą kol}})^T$$



$$1_{ij}^T = 1_{ji}$$

Definicja 4.15 (Macierze elementarne)**.** Macierze odpowiadające operacjom elementarnym, tj. T_{ij} dla $i \neq j$, $(\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij})$ dla $i \neq j$ oraz $D_{i\alpha}$ dla $\alpha \neq 0$ nazywamy *macierzami elementarnymi.*

Zauważmy, że tym samym możemy zinterpretować cały proces eliminacji Gaussa jako kolejne działania macierzy elementarnych.

Fakt 4.16. *Eliminację Gaußa można zinterpretować jako mnożenie macierzy powstałej przez zestawienie wektorów (w wierszach/kolumnach) z układu wejściowego przez macierze elementarne (odpowiednio z lewej lub prawej strony).*

4.4 Przekształcenie liniowe dla macierzy

Od teraz (w zasadzie do końca) wektory zapisujemy w pionie i identyfikujemy je z macierzami $n \times 1$.

$F_M(\vec{v}) = M \cdot \vec{v}$

Mnożenie przez macierz jest liniowe

$M(\vec{v} + \vec{v}') = M\vec{v} + M\vec{v}'$

$M(\alpha \vec{v}) = \alpha M \vec{v}$

$(F_M + F_N)(\vec{v}) \qquad F_{M+N}(\vec{v})$

$\shortparallel$

$F_M(v) + F_N(v) \qquad (M+N)v$

$Mv + Nv$

$F_{\alpha M}(v) = \alpha(Mv) = \alpha \cdot F_M(\vec{v})$

$F_{Id}(v) = \qquad Id\,\vec{v} = \vec{v} = Id(\vec{v})$

pr. liniowe

Dla macierzy M rozmiaru $m \times n$ możemy zadać przekształcenie liniowe $F_M : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ przez

$$F_M(\vec{v}) = M\vec{v} \ .$$

$(m \times n) \cdot (n \times 1)$ $\quad L_M$

Liniowość wynika z liniowości mnożenia macierzy.

Takie przekształcenie będziemy nazywać *przekształceniem indukowanym przez macierz M.*

Twierdzenie 4.17. *Przekształcenie $M \mapsto F_M$ jest izomorfizmem (przestrzeni liniowych) zbioru macierzy $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ i zbioru przekształceń liniowych z $\{F : F : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, F$ jest przekształceniem liniowym$\}$.*

Pozostaje sprawdzić, jak wyraża się składanie tak zadanych przekształceń.

Twierdzenie 4.18. *Dla macierzy odpowiednich rzędów mamy*

$$F_{M'M} = F_{M'}F_M$$

tzn. przekształcenia zadane przez iloczyn macierzy $M'M$ jest złożeniem przekształceń zadanych przez macierze M' i M.

$$F_{M'M}\vec{v} = (M'M)\vec{v}$$

$$\|$$

$$(F_{M'} \circ F_M)\vec{v} = M'(M\vec{v})$$

ABSTRAKCJA

$v \longmapsto Mv$ $\qquad$ pr. liniowe $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$

4.5 Rząd macierzy

Definicja 4.19 (Rząd macierzy)**.** Rząd macierzy to wymiar przestrzeni generowanej przez kolumny tej macierzy (traktowanych jako wektory w $\mathbb{F}^n$). Oznaczamy go przez $\mathrm{rk}(M)$. Tj. jeśli $M = [M_1|M_2|\cdots|M_n]$ to

$$\mathrm{rk}(M) = \dim \mathrm{LIN}(M_1, \ldots, M_n)$$

Lemat 4.20. *Niech M będzie macierzą a F_M indukowanym przez nią przekształceniem liniowym. Wtedy*

$$\mathrm{rk}(M) = \mathrm{rk}(F_M)$$

$F_M = \dim \underbrace{\mathrm{Im}\, F}$ $\qquad F : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$

$\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n \leftarrow$ baza st.

$$\underbrace{\dim\Big(\mathrm{LIN}\big(\underbrace{F_M \vec{E}_1}_{\underbrace{M\vec{E}_1}_{M_1}}, \underbrace{F_M \vec{E}_2}_{\underbrace{M\vec{E}_2}_{M_2}}, \dots, \underbrace{F_M \vec{E}_n}_{\underbrace{M\vec{E}_n}_{M_n}}\big)\Big)}_{\mathrm{rk}(M)} = \dim(\mathrm{Im}\, F_M) = \mathrm{rk}(F_M)$$

generują obraz

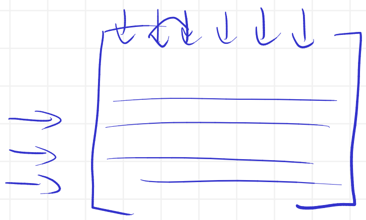
Ta obserwacja pozwala przełożyć znane nam wyniki dotyczące rzędu przekształceń liniowych na macierze. Np.

Lemat 4.21. *Dla macierzy M, N odpowiednich rozmiarów zachodzi*

$$\mathrm{rk}(MN) \leq \min(\mathrm{rk}(M), \mathrm{rk}(N))$$

$$F_{MN} = F_M \circ F_N$$

$$\underbrace{\mathrm{rk}(F_{MN})}_{\mathrm{rk}(MN)} = \mathrm{rk}(F_M \circ F_N) \le \min\big(\underbrace{\mathrm{rk}(F_M)}_{\mathrm{rk}(M)}, \underbrace{\mathrm{rk}(F_N)}_{\mathrm{rk}(N)}\big)$$



Tak zdefiniowany rząd nazwiemy na potrzebę kolejnego dowodu *rzędem kolumnowym*, analogicznie można zdefiniować *rząd wierszowy*. Okazuje się, że są one równe.

Twierdzenie 4.22. *Rząd kolumnowy i wierszowy ustalonej macierzy M są sobie równe.*

W szczególności, $\mathrm{rk}(M) = \mathrm{rk}(M^T)$.

Pokażemy dowód tego faktu oparty na algorytmie eliminacji Gaussa.

Lemat 4.23. *Operacje elementarne kolumnowe (wierszowe) na macierzach nie zmieniają rzędu wierszowego i kolumnowego macierzy.*

Fakt: A, A' — kwadratowe

$AA' = A'A = \mathrm{Id}$ $\qquad$ $\mathrm{rk}(AC) = \mathrm{rk}(C)$

$\mathrm{rk}(BA) = \mathrm{rk}(B)$

tę własności mają op. el.

$T_{ij} T_{ij} = \mathrm{Id}$ $\qquad$ $D_{i\alpha} D_{i\,1/\alpha} = \mathrm{Id}$ $\qquad$ $(\mathrm{Id} + \alpha 1_{ij})(\mathrm{Id} - \alpha 1_{ij}) = \mathrm{Id}$

$AA' = \mathrm{Id}$

$A^T A'^T = \mathrm{Id}$

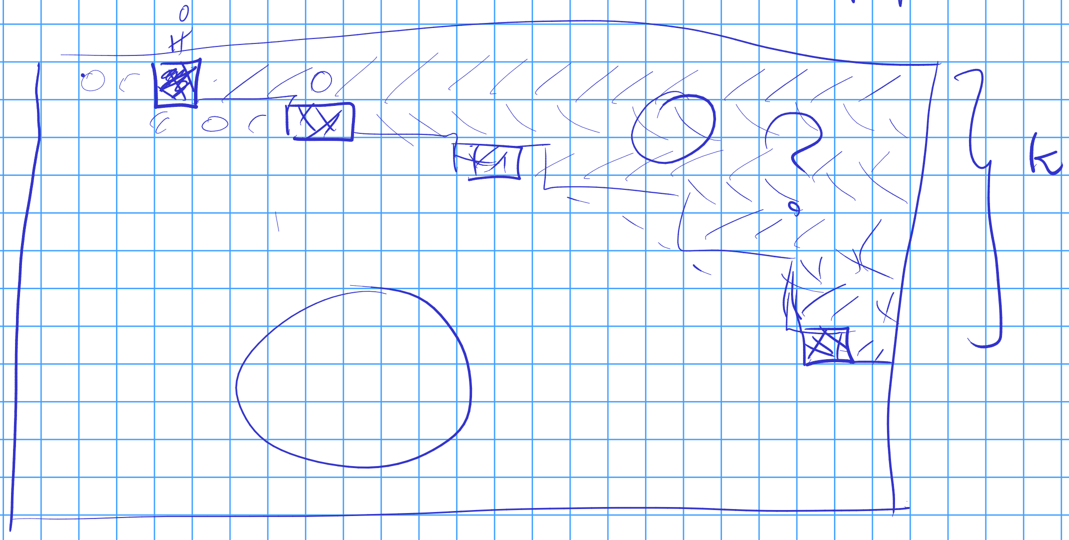
$\mathrm{rk}((M\ E)^T) = \mathrm{rk}(E^T M^T) = \mathrm{rk}(M^T)$

rząd wierszowy $M \cdot E$ $\qquad$ macierz op. el. $\qquad$ rząd wierszowy M

Lemat 4.24. *Dla macierzy w wierszowej postaci schodkowej rząd wierszowy i kolumnowy macierzy jest taki sam.*

Analogiczne stwierdzenie zachodzi dla macierzy w kolumnowej postaci schodkowej.

$rk(M) = r(M^T)$ M – w wierszowej post. sch.



A rząd kol?

k liniowo niez. kol.
$rk(M') = rk(M) = k$

Dlatego od tego momentu mówimy po prostu o rzędzie macierzy.

Uwaga. Przy liczeniu liniowej niezależności dla zbioru wektorów możemy wykonywać *zarówno* operacje wierszowe jak i kolumnowe. Proszę jednak pamiętać, że wykonywanie operacji kolumnowych nie zmienia przestrzeni rozpiętej przez kolumny, natomiast wykonanie operacji wierszowych może zmienić tę przestrzeń (i zwykle zmienia). Tym samym jeśli mieszamy te operacje, to nie umiemy powiedzieć, np. jaka jest baza przestrzeni rozpiętej przez układ wektorów.

Tym niemniej, jeśli stosujemy oba typy operacji, ale użyjemy tylko wierszy $\{i_1, \ldots, i_k\}$ do eliminacji (i jakichś kolumn) i na końcu odpowiadające wiersze są niezależne (a pozostałe zerami), to odpowiadające wiersze z wejścia są niezależne.

rk (M)

4.6 Obliczanie bazy jądra przekształcenia

Jako przykładowe zastosowaniem macierzy, pokażemy jak obliczyć bazę jądra przekształcenia indukowanego przez macierz M (zwanego dalej po prostu jądrem macierzy).

Napiszmy ker L_M E^M Im L_M

$$M\,\mathrm{Id}_n = M$$

← Eliminacja Gaussa na kol.

Wykonujemy teraz eliminację Gaussa (na kolumnach) tak długo, aż doprowadzimy M (po prawej stronie) do postaci schodkowej (kolumnowej). Zauważmy, że możemy myśleć o tych operacjach jak o macierzach, czyli odpowiadają one mnożeniu z prawej strony obu stron równości przez te same macierze, czyli wykonywaniu tych samych operacji kolumnowych na M oraz Id_n (czy też dokładniej macierzy, która tam jest).

Na końcu otrzymujemy zależność postaci:

$$MA = M'$$

$I E \leftarrow$ op.e. $MA = [\text{niezal.} \mid \vec{0}]$

gdzie M' jako pierwsze kolumny zawiera wektory niezależne, a potem same wektory zerowe. Ale to oznacza, że przy mnożeniu przez M odpowiednie wektory w macierzy A przechodzą na wektory 0. W czasie trwania procesu kolumny A pozostają niezależne (bo to jest eliminacja Gaussa), czyli odpowiednie kolumny stanowią bazę jądra.

$n = \mathrm{rk}\, \mathrm{Im}\, L_M + \mathrm{rk}\, \ker L_M$

Zauważmy, że M po lewej stronie potrzebne jest tylko do dowodu, w samym algorytmie możemy go nie używać. Innymi słowy, algorytm trzyma parę macierzy (początkowo: (M, Id_n)) i wykonujemy na obu z nich takie same operacje kolumnowe, tak by doprowadzić M do postaci schodkowej (kolumnowej). Wtedy kolumny w drugiej macierzy odpowiadające kolumnom $\vec{0}$ z pierwszej to baza jądra.

Przykład 4.25. Dla macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+(3)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2+3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2-(1)+3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{n}_{3} = \underbrace{rk\,M}_{2} + \underbrace{\dim \ker M}_{1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2-(1)+3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wykonując analogiczne operacje na ma cierzy Id_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+(3)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Łatwo sprawdzić, że faktycznie wektor $[-1, 1, 1]^T$ należy do jądra Z drugiej strony, wymiar jądra to $\dim(\mathbb{R}^3) - 2 = 1$, czyli faktycznie ten wektor stanowi bazę jądra.

4.7 Macierz odwrotna

Definicja 4.26. Macierz kwadratowa, która ma przekształcenie odwrotne, tj. istnieje macierz M' taka że

$$M \cdot M' = M' \cdot M = \mathrm{Id}_n \ ,$$

M^{-1}

nazywamy macierzą *odwracalną* lub macierzą *nieosobliwą.* Macierz M' o właściwościach jak wyżej nazywamy macierzą odwrotną do M i oznaczamy przez M^{-1}.

Lemat 4.27. *Macierz M jest odwracalna $\iff$ przekształcenie F_M jest odwracalne. Co więcej, $F_{M^{-1}} = F_M^{-1}$.*

$\Rightarrow$ M^{-1} $\quad M \cdot M^{-1} = \mathrm{Id}$

$$F_M \cdot F_{M^{-1}} = F_{MM^{-1}} = F_{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$$

$$M^{-1} M = \mathrm{Id}$$

$F_M^{-1} = F_{M^{-1}}$ istnieje

$\Leftarrow$ F_M $\quad (F_M)^{-1}$

$$(F_M \circ F_M^{-1}) = (F_M^{-1} \circ F_M) = \mathrm{Id}$$

$$F_M^{-1} = F_{M'}$$

$$F_{M'} \circ F_M = \mathrm{Id} = F_{\mathrm{Id}}$$

$F_{M'M} = F_{\mathrm{Id}}$ $\quad M'M = \mathrm{Id}$

Twierdzenie 4.28. *Macierz A wymiaru $n \times n$ jest odwracalna $\iff$ $\mathrm{rk}(A) = n$.*

F jest odwracalne $\Longleftrightarrow$ rk $(F) = n$

$\Longrightarrow$ F jest odwracalne $\Rightarrow$ jest na

dim Im $F = n$

$\Longleftarrow$ rk $(F) = n$ $\quad E_1, E_2, \dots, E_n \xrightarrow{F} \vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}$

F'

niezależne, baza

$\operatorname{Im} F = LIN(b_1, \dots, b_n)$

$F' \vec{b_i} = \vec{E_i}$

$\underbrace{F F' \vec{b_i}}_{E_i} = F \vec{E_i} = \vec{b_i}$ id.

$F' \underbrace{F E_i}_{\vec{b_i}} = F' \vec{b_i} = \vec{E_i}$ id.

B jest odwrotna do A

$A \cdot B = Id$

$B \cdot A = Id$

Lemat 4.29. *Jeśli A jest macierzą kwadratową $n \times n$ to macierz kwadratowa B jest jej odwrotnością, jeśli $AB = \mathrm{Id}$ lub $BA = \mathrm{Id}$.*

$$A \cdot B = Id \overset{?}{\Rightarrow} BA = Id$$

Dla przekształceń liniowych

$$F \cdot F' = Id \Rightarrow F' \cdot F = Id$$

$E_1, \dots, E_n \leftarrow$ baza

$F_1, \dots, F_n$ $\qquad F_i = F'(E_i)$

1° $F_1, \dots F_n \leftarrow$ baza $\qquad$ niezależne

$(FF_1), (FF_2), \dots, F(F_n) = \vec{E}_1, E_2, \dots, E_n$

niezależne $\Rightarrow$ baza

$$\overbrace{F' \cdot F}^{Id}(\vec{F}_i) = F'(\underbrace{F F'}_{Id})E_i = F' E_i = \vec{F}_i \qquad id, \text{ na bazie}$$

Dowody poniższych prostych faktów pokażemy na ćwiczeniach.

Fakt 4.30. *Jeśli MN jest odwracalna a M, N są kwadratowe, to również M, N są odwracalne.*

Niech M, N będą odwracalne. Wtedy:

- $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$
- $(M^{-1})^{-1} = M$
- $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

Proste dowody pozostawiamy jako ćwiczenia.

Fakt 4.31. *Jeśli A jest macierzą odwracalną a B, C są macierzami odpowiednich rozmiaróœ (tzn. takimi, że mnożenia AB oraz CA są określone) to*

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B) \quad oraz \quad \mathrm{rk}(CA) = \mathrm{rk}(C) \ .$$

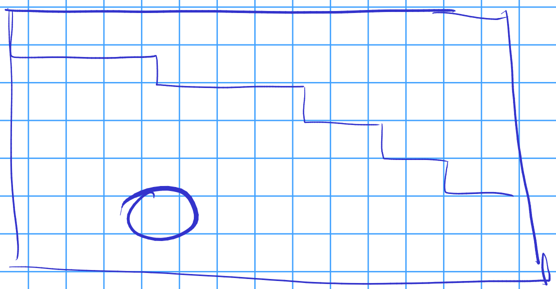
$$rk(AB) \overset{=}{\le} rk(B) = rk(A^{-1}(AB)) \le rk(AB)$$

4.8 Jeszcze o eliminacji Gaußa

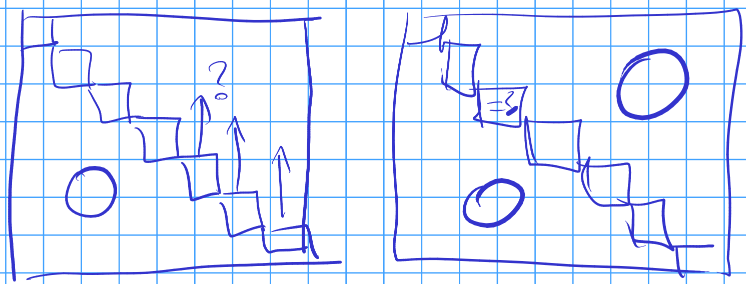
Lemat 4.32. *Jeśli macierz M jest odwracalna, to przy użyciu eliminacji Gaußa (na wierszach lub kolumnach) można doprowadzić ją do macierzy przekątniowej (bez zer na przekątnej).*

Używając eliminacji Gaußa zarówno na wierszach jak i na kolumnach można dowolną macierz kwadratową przekształcić do macierzy przekątniowej. Ponadto, można najpierw wykonać wszystkie operacje na wierszach a potem na kolumnach (lub odwrotnie).

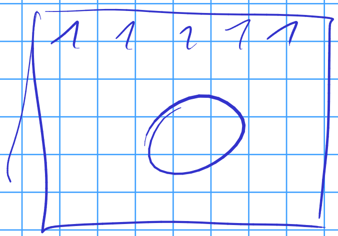
A →



1° A odwracalna



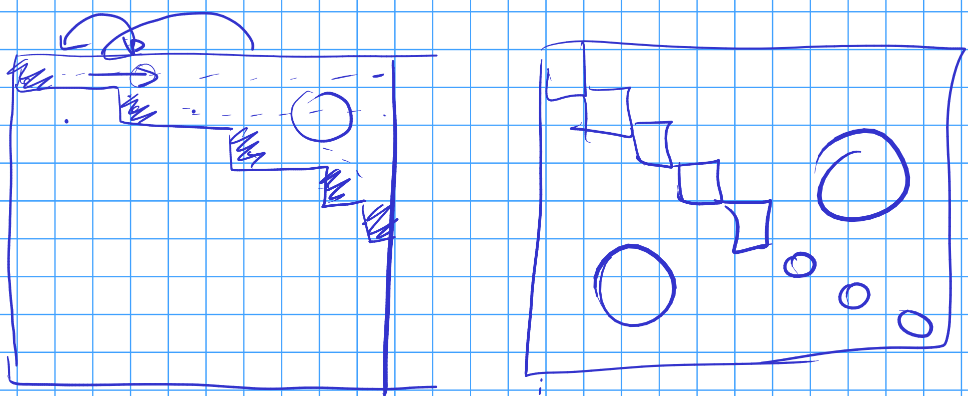
2°



· wierszowe

Zarówno wierszowe jak i kolumnowe dadzą macierz prel.

Najpierw jedne potem drugie



Lemat 4.32 można zinterpretować jako mnożenie macierzy elementarnych.

Lemat 4.33. *Każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych Co więcej, macierze $D_{i\alpha}$ mogą być ostatnie lub pierwsze.*

Każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych oraz macierzy postaci $D_{i,0}$ (lub jednej macierzy przekątniowej).

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

$A = \prod E_i$

elementarne

4.9 Metoda algorytmiczna obliczania macierzy odwrotnej

Przedstawimy efektywny sposób obliczania macierzy odwrotnej.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \mathrm{Id}$

Zapiszmy równanie:

kolumnowe

n^2 zm. n^2

1° S. modłowej

$$A^{-1}A = \mathrm{Id}\,.$$

E. Gaußa

Dokonujemy diagonalizacji A używając metody eliminacji (dla kolumn). Wiemy, że każda operacja kolumnowa odpowiada przemnożeniu (z prawej strony) przez odpowiednią macierz elementarną. Tym samym w kroku pośrednim mamy równanie postaci

$$A^{-1}A' = B,$$

$A^{-1} \cdot \mathrm{Id} = B = A^{-1}$

op. el.

gdzie B jest macierzą uzyskaną przez zastosowanie tych samych operacji na Id, co na A.

Gdy A' jest macierzą diagonalną, to albo ma jakieś 0 (sprzeczność), albo nie i wtedy przekształcamy ją do macierzy Id mnożąc odpowiednio kolumny przez skalar. Te same operacje wykonujemy na macierzy B.

Na końcu uzyskujemy równanie

$A \to \mathrm{Id}$, $\mathrm{Id} \to A^{-1}$

$$A^{-1}\,\mathrm{Id} = B$$

i tym samym mamy szukaną przez nas macierz A^{-1}.

Przykład 4.34. Obliczmy macierz odwrotną do

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sprowadzamy A do macierzy identycznościowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(I+II-III)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III}$$

Wykonajmy te same operacje na macierzy identycznościowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(\mathrm{I}+\mathrm{II}-\mathrm{III})} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \to \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}$$

A Id

Rozdział 5

Przekształcenia liniowe i macierze

$m \times n$ M $\longleftrightarrow$ $L_M : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$

$L : V \to W$

$\dim V = n$ $\quad$ $\dim W = m$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "B_V"] & W \arrow[d, "B_W"] \\
\mathbb{F}^n \arrow[r, "M"] \arrow[u, bend left] & \mathbb{F}^m \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

$\overbrace{B_W \circ F \circ B_V^{-1}}^{\text{liniowe}} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$

liniowe $\quad M$

$\underbrace{B_W} \circ F \circ \underbrace{B_V^{-1}} = L_M$

$F = B_W^{-1} \circ L_M \circ B_V$

5.1 Wprawka

$F : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$

$M \qquad L_M = F$

Wiemy, że dla ustalonych $\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m$ zbiór macierzy M nad $\mathbb{F}$ rozmiaru $m \times n$ jest izomorficzny ze zbiorem wszystkich przekształceń liniowych z $\mathbb{F}^n$ w $\mathbb{F}^m$. W jedną stronę jest łatwo: mając M jego przekształcenie liniowe zadajemy jako

$$L_M(\vec{v}) = M\vec{v} \ .$$

$M = [M_1 | M_2 | \ldots | M_m]$

$M_i := M E_i = F(E_i)$

A jak to zrobić w drugą stronę? Dla danego L chcemy skontruwać M takie że $M\vec{v} = L(\vec{v})$. Zauważmy, że i-ta kolumna M to $M\vec{E}_i$. Ale M ma spełniać $M\vec{v} = L(\vec{v})$ dla każdego $\vec{v}$, w szczególności dla $\vec{E}_i$. Czyli $L(\vec{E}_i) = M\vec{E}_i$. I tym samym

$$M = [L(\vec{E}_1)|L(\vec{E}_2)| \cdots |L(\vec{E}_n)] \ .$$

$F \to [FE_1 | FE_2 \ldots]$

M

$L_M = F$

5.2 Wyrażanie przekształcenia liniowego w bazie

Definicja 5.1 (Macierz przekształcenia w bazie)**.** Dla przestrzeni liniowych $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$, przekształcenia liniowego $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $B_\mathbb{V}$, $B_\mathbb{W}$: baz odpowiednio $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{W}$, gdzie $B_\mathbb{V} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ oraz $B_\mathbb{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ macierz $M_{B_\mathbb{V} B_\mathbb{W}}(F)$ (*macierz przekształcenia F wyrażona w bazach $B_\mathbb{V}$ i $B_\mathbb{W}$*) to macierz zadana jako

n wektora

$$[(F(\vec{v}_1))_{B_\mathbb{W}} | (F(\vec{v}_2))_{B_\mathbb{W}} | \cdots | (F(\vec{v}_n))_{B_\mathbb{W}}] \} \cdot m$$

Jest to macierz rozmiaru $m \times n$.

$m \times n$

Uwaga. To formalizuje podejście z diagramu powyżej: startujemy z $\mathbb{F}^n$, bierzemy $\vec{E}_i$, przechodzimy do $\mathbb{V}$, czyli mamy $\vec{v}_i$, nakładamy F, mamy $F(\vec{v}_i)$ i potem wracamy do $\mathbb{V}$ wyrażając $F(\vec{v}_i)$ w bazie $B_\mathbb{W}$.

Uwaga. Zwykle $W = \mathbb{V}$ oraz $B_\mathbb{V} = B_\mathbb{W}$. Ponadto, dla $\mathbb{V} = \mathbb{F}^n$ i $W = \mathbb{F}^m$ bazami są zwykle bazy standardowe.

Przykład 5.2. Rozważmy przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone jako: $F(x, y, z) = (x + y, y - z)$. Wtedy jego macierz w bazach standardowych dla $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathbb{R}^2$ to

$F(1,0,0)=(1,0)$
$F(0,1,0)=(1,1)$
$F(0,0,1)=(0,-1)$

$$M_{E,E'}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozważmy to samo przekształcenie wyrażone w bazach $\underbrace{\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}}_{B_3}$ oraz $\underbrace{\{(1, 1), (1, -1)\}}_{B_2}$. Wektory $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ zostaną przekształcone na odpowiednio:

$F(1,1,1)=(2,0)$ $F(0,1,1)=(1,0)$ $F(1,2,0)=(2,1)$

$$(2, 0), (1, 0), (2, 1) ,$$

$(2,1) = \alpha \cdot (1,1) + \beta (1,-1)$

które wyrażają się w bazie $\{(1, 1), (1, -1)\}$ jako

$$M_{B_3,B_2}(F) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Lemat 5.3. *Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$: przekształcenie oraz $B_\mathbb{V}$, $B_\mathbb{W}$ będą bazami odpowiednio $\mathbb{V}$ oraz W, gdzie $B_\mathbb{V} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ oraz $B_\mathbb{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$. Wtedy dla każdego wektora $v \in \mathbb{V}$:*

$(F\vec{v})_{B_W}$

$$M_{B_\mathbb{V} B_\mathbb{W}}(F) \cdot (\vec{v})_{B_\mathbb{V}} = (F\vec{v})_{B_\mathbb{W}}$$

prz. liniowe prz. liniowe

Wykażmy, że równość zachodzi na $\vec{v}_i$

$$\underbrace{\underbrace{M_{B_V B_W}(F)}\cdot\underbrace{(\vec{v}_i)_{B_V}}_{\vec{E}_i}}_{i\text{-ta kol.}} \qquad (F\cdot v_i)_{B_W}$$

z def. $(F(v_i))_{B_W}$

$M\cdot E_i \leftarrow i$-ta kol M

$$\underline{M} = M\cdot Id = M\cdot[\vec{E}_1|\vec{E}_2|\cdots|\vec{E}_n]$$
$$= \underline{[M\vec{E}_1|ME_2|\ldots|ME_n]}$$

Rozumowanie to przenosi się na macierze oraz na iloczyn macierzy, który odpowiada składaniu przekształceń liniowych.

Lemat 5.4. *Niech $\mathbb{V}, \mathbb{V}', \mathbb{V}''$ będą przestrzeniami liniowymi o bazach B, B', B'', zaś $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, $F' : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$ przekształceniami liniowymi. Wtedy*

$$M_{BB''}(F'F)\vec{E}_i = M_{B'B''}(F') \cdot M_{BB'}(F)\vec{E}_i$$

macierze

$$\begin{array}{ccccc} O & \to & O & \to & O \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ V^n & \xrightarrow{M_F} & V^k & \xrightarrow{M_{F'}} & V^m \end{array}$$

$B = v_1, \ldots, v_m$

$$M_{BB''}(F'F)\underbrace{(\vec{E}_i)}_{(\vec{v}_i)_B} = M_{BB'}(F'F)(\vec{v}_i)_B = (F'F\vec{v}_i)_{B''}$$

$$M_{B'B''}(F') \cdot \underbrace{M_{BB'}(F)(v_i)_B}_{\text{Lemat}} = \underbrace{M_{B'B''}(F')(Fv_i)_{B'}}$$

$$= (F'Fv_i)_{B''}$$

Lemat 5.5. *Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym zaś $B_{\mathbb{V}}, B_{\mathbb{W}}$ dowolnymi bazami $\mathbb{V}$ oraz W. Wtedy*

$$\mathrm{rk}(F) = \mathrm{rk}(M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(F))$$