Lista 3

Zadanie 1. Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B, takich że $AB = BA$, jest przestrzenią liniową.

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.

Wskazówka: Można na palcach, ale można też prawie bez rachunków: zauważ, że każda macierz komutuje z Id oraz M komutuje z M. Oblicz też wymiar przestrzeni tych macierzy.

Zadanie 2. Pokaż, że dla macierzy A, B odpowiednich rozmiarów zachodzi

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad ,$$
$$(A^T)^T = A$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad .$$

Zadanie 3. Wyznacz bazę jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Zadanie 4. Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach w $\mathbb{R}$) w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad .$$

Zadanie 5. Niech M będzie macierzą wymiaru $n \times n$ postaci:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Oblicz rząd macierzy M^k dla każdego $k \geq 1$. *Uzasadnij odpowiedź.*

Zadanie 6. Podaj macierz odwrotną do macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad .$$

Zadanie 7. Niech A, B będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru. Pokaż, że

- Jeśli AB jest odwracalna to A i B również są odwracalne.
- Jeśli A, B są odwracalne, to AB też jest odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Jeśli A jest odwracalna, to $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^{-1} jest odwracalna i $(A^{-1})^{-1} = A$.

Zadanie 8. Niech M będzie odwracalną macierzą dolnotrójkątną/górnotrójkątną/diagonalną. Pokaż, że M^{-1} również jest dolnotrójkątna/górnotrójkątna/diagonalna.

Zadanie 9. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są odwracalne i podaj ich macierze odwrotne:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10 (* Nie liczy się do podstawy). Pokaż, że każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych. Co więcej, macierze $D_{i\alpha}$ mogą być ostatnie lub pierwsze.

Pokaż też, że każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych oraz (jednej) macierzy przekątniowej (może ona mieć zera na przekątnej).

Wskazówka: Skorzystaj z faktu, że używając eliminacji Gaussa można sprowadzić macierz odwracalną do macierzy diagonalnej. Zinterpretuj te operacje jako mnożenie macierzy i odwróć kolejne operacje. Dla macierzy nieodwracalnej skorzystaj z faktu używającego jednocześnie eliminacji na kolumnach i wierszach, potem postępuj podobnie.

Zadanie 11. Wyznacz macierze poniższych przekształceń w bazie standardowej odpowiedniego $\mathbb{R}^n$:

- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$;
- obrót przestrzeni $\mathbb{R}^2$ o kąt α (w lewo, tj. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara);
- symetrii $\mathbb{R}^2$ względem prostej zadanej równaniem $y = 2x$.