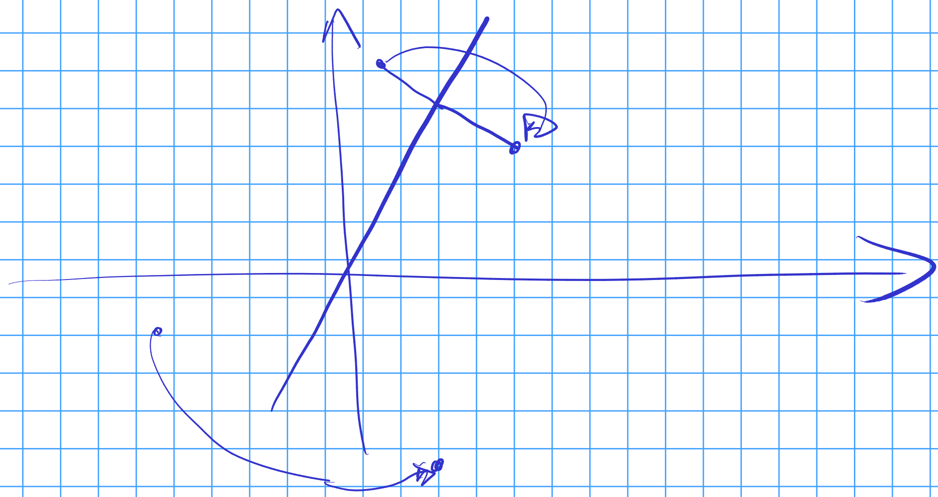
WYKŁAD 4



Przekształcenie liniowe w bazie

$$F: V \to W$$
$$B_V \qquad B_W$$
$$B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$M_{B_V B_W}(F) = \left[(F(v_1))_{B_W} \mid (F(v_2))_{B_W} \mid \dots \mid (F(v_n))_{B_W} \right]$$

$$M_{B_V B_W}(F) \cdot (\vec{v})_{B_V} = (F\vec{v})_{B_W}$$

$$M_{B_W B_U}(F') \, M_{B_V B_W}(F) = M_{B_V B_U}(F' \circ F)$$

Lemat 5.5. *Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym zaś $B_{\mathbb{V}}, B_{\mathbb{W}}$ dowolnymi bazami $\mathbb{V}$ oraz W. Wtedy*

$$\mathrm{rk}(F) = \mathrm{rk}(M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(F))$$

$B_V = \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$

$\mathrm{rk}(F) = \dim \mathrm{Im}(F) = \dim \mathrm{LIN}(F(\vec{v}_1), F(\vec{v}_2), \dots, F(\vec{v}_n))$

V − B − baza

wektory w $\mathbb{W}$

$\mathbb{W} \to \mathbb{F}^m$ przez wyrażenie w bazie to izomorfizm

$= \dim \mathrm{LIN}((F(v_1))_{B_W}, (F(v_2))_{B_W}, \dots, (F(v_n))_{B_W})$

$= \mathrm{rk}\, M_{B_{\mathbb{V}} B_{\mathbb{W}}}(F)$

kolumny macierzy $M_{B_V B_W}$

5.3 Macierz zmiany bazy

$M_{B_V B_V}(F) \longleftrightarrow M_{B_W, B_V'}(F)$

Jedną z rzeczy, którą możemy w ten sposób wyrazić, jest macierz zmiany bazy: chcemy mieć w miarę jednolity sposób na przejścia z macierzy w jednej bazie do macierzy w innej bazie.

Definicja 5.6 (Macierz zmiany bazy)**.** Dla baz B, B' przestrzeni wektorowej $\mathbb{V}$ *macierz zmiany bazy między B a B'* $M_{BB'}$ to macierz $M_{BB'}(\mathrm{Id})$.

Fakt 5.7. *Dla baz B' oraz $B = \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ macierz zmiany bazy zadana jest jako*

$M_{BB'}(\mathrm{Id}) = ((\vec{v}_1)_{B'} | (\vec{v}_2)_{B'} \dots$

$$M_{BB'} = [(\vec{v}_1)_{B'} | (\vec{v}_2)_{B'} | \cdots | (\vec{v}_n)_{B'}] .$$

Lemat 5.8. *Niech* $B_{\mathbb{V}}, B'_{\mathbb{V}}$ *będą bazami* $\mathbb{V}$. *Wtedy*

$$M_{BB'}M_{B'B} = \mathrm{Id},$$

tzn. są to macierze odwrotne.

$$M_{BB'}(\mathrm{Id}) \cdot M_{BB}(\mathrm{Id}) = M_{B'B}(\mathrm{Id}\ \mathrm{Id}) = M_{B'B'}(\mathrm{Id})$$

$(\mathrm{Id}\ v_i)_{B'}$

$v_1, \dots, v_n$ B'

i-ta kol.

$M_{B'B'}(\mathrm{Id})$ $\underbrace{(v_i)_{B'}}_{\vec{E_i}}$ $= \mathrm{Id}$

Lemat 5.9. *Niech* $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *będzie przekształceniem liniowym,* $B_{\mathbb{V}}, B'_{\mathbb{V}}$ *bazami* $\mathbb{V}$ *zaś* $B_{\mathbb{W}}, B'_{\mathbb{W}}$ *bazami* W. *Wtedy*

$$M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(F) = \boxed{M_{B'_{\mathbb{W}}B_{\mathbb{W}}}}\, M_{B'_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{W}}}(F)\, \boxed{M_{B_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{V}}}}.$$

dostaje wekt. w bazie B_V
zwraca w B_W

dostaje w B_V'
zwraca w B_W'

$$M_{B'_W B_W}(\mathrm{Id})\ M_{B'_V B_{W'}}(F) \cdot M_{B_V B_V'}(\mathrm{Id})$$

$$= M_{B'_W B_W}(\mathrm{Id}) \cdot M_{B_V B_{W'}}(F) = M_{B_V B_W}(F)$$

$$M_{B_{W'} B_W}(\mathrm{Id})\ M_{B'_V B_{W'}}(F)\ M_{B_V B_{V'}}(\mathrm{Id}) \cdot (\vec{v_i})_{B_V}$$

i-ty wektor z B_V

Uwaga. Najczęściej będziemy zajmować się przypadkiem, gdy $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ i $B_{\mathbb{V}} = B_{\mathbb{W}}$ i $B'_{\mathbb{V}} = B'_{\mathbb{W}}$.

Przykład 5.10. W $\mathbb{R}^3$ rozpatrzmy bazę standardową E oraz bazę B: $\overset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}$.

$(v_i)_E$ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $(E_1)_B$ $(E_2)_B$ $(E_3)_B$

Wtedy

$$M_{BE} = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}, M_{EB} = \begin{bmatrix}0,5&0,5&-0,5\\0,5&-0,5&0,5\\-0,5&0,5&0,5\end{bmatrix}$$

Można łatwo sprawdzić, że

$$M_{EB}M_{BE} = \mathrm{Id}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Rozpatrzmy przekształcenie F, (wyrażone w bazie standardowej) jako

$$M_{EE}(F) = \begin{bmatrix}4&0&0\\-1&5&1\\-1&1&5\end{bmatrix}$$

Wtedy

EE

$$M_{BB}(F) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\-1&5&1\\-1&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&4&0\\4&0&6\\0&4&6\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

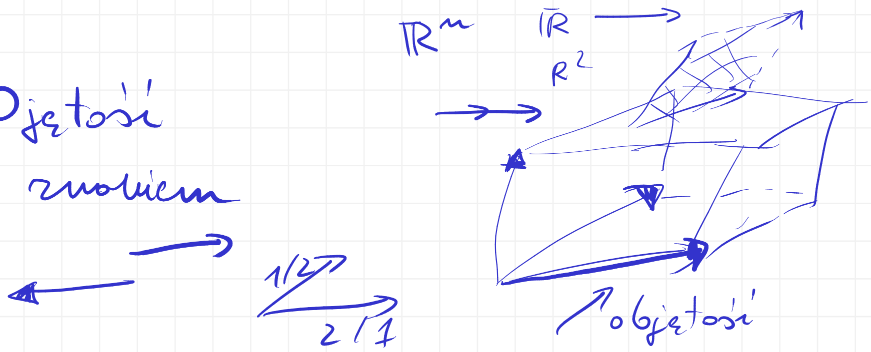
Oraz

BB

$$M_{EE}(F) = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&-2&2\\-3&3&3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4&0&0\\-1&5&1\\-1&1&5\end{bmatrix}$$

Objętość ze znakiem



Rozdział 6

Wyznacznik

6.1 Wyznacznik

Ważna funkcja na macierzach: *wyznacznik*. Uogólnienie objętości (ale ze znakiem).

Jakie własności powinna mieć objętość na zbiorze n wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ z $\mathbb{F}$ w $\mathbb{F}$? ($\det : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$):

$\mathbb{F}$ $(\mathbb{F}^n)^n$

(W1) (liniowość) jest funkcją wielo-liniową, tj. liniową dla każdej kolumny:

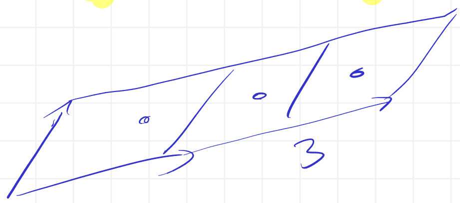
ustalone

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \alpha\vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = \alpha\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)$$

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \vec{v}_i', \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) + \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i', \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)$$

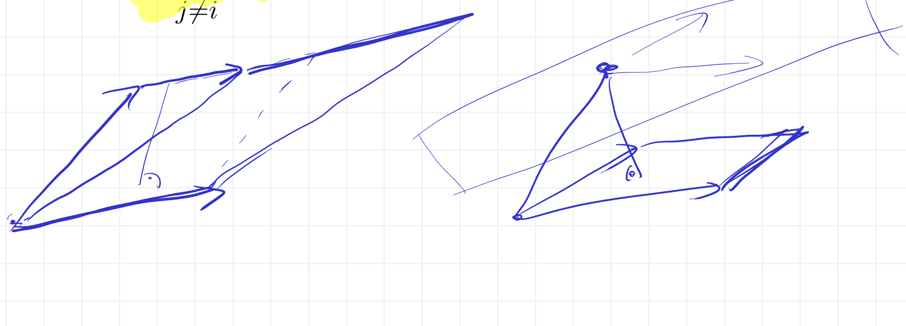
W szczególności

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{0}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = 0$$



(W2) zastąpienie $\vec{v}_i$ przez $\vec{v}_i + \sum_{j\neq i} \alpha_j\vec{v}_j$ nie powinno zmieniać wartości

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \sum_{j\neq i} \alpha_j\vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)$$



(W3) zamiana kolejności dwóch wektorów zmienia znak (objętość ze znakiem)

$$\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = -\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{j+1} \ldots, \vec{v}_n)$$

(W4) na macierzy identycznościowej to jest 1 skalowanie

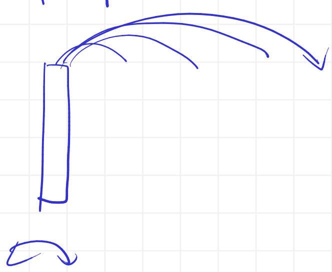
$$\det(\mathrm{Id}) = 1$$

Jest to tak zwana „aksjomatyczna definicja wyznacznika”. W1–W4

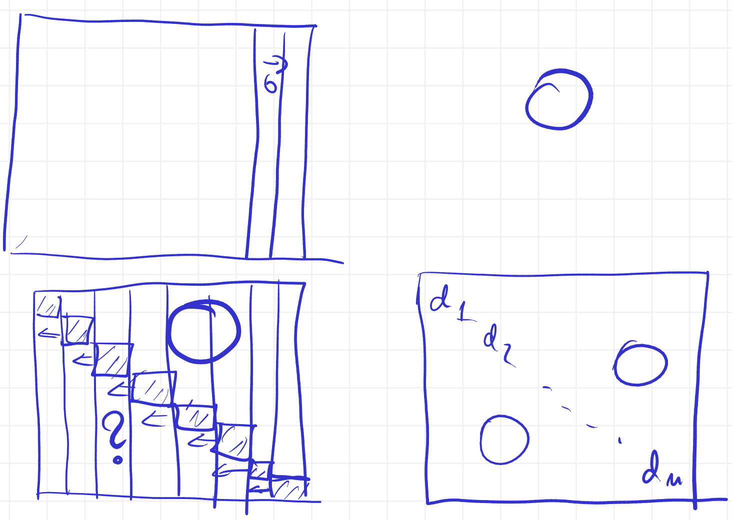
Lemat 6.1. *Jest dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki W1–W4.*

Algorytm obliczania

M przeprowadzamy el. Gaussa na M (kolumnowo)



wart. się nie zm.



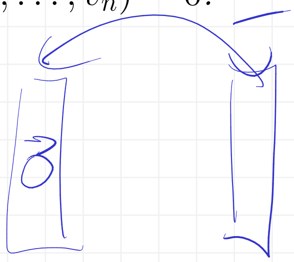
$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n \cdot \cancel{\det(\mathrm{Id})}_{1}$

Definicja 6.2 (Wyznacznik). *Wyznacznik* macierzy kwadratowej $\det(A) = |A|$. To jedyna funkcja spełniająca warunki W1–W4. Oznaczamy go też przez przez $|A|$.

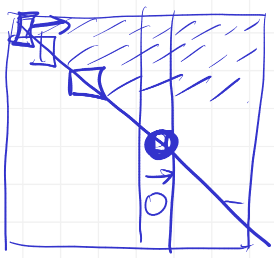
6.2 Własności i metody obliczania wyznacznika

Fakt 6.3. *Proste własności wyznacznika*

- *Jeśli* $\vec{v}_i = \vec{v}_j$ *to* $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) = 0$.



- *Dla macierzy trójkątnej jest to iloczyn elementów na przekątnej.*



Jak nie ma 0

- $\det(A) \neq 0 \iff \mathrm{rk}(A) = n$

rk(A)=n

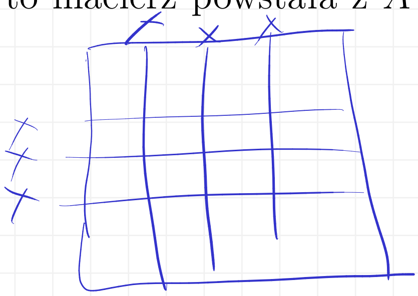
rk(A)<n

≠ 0

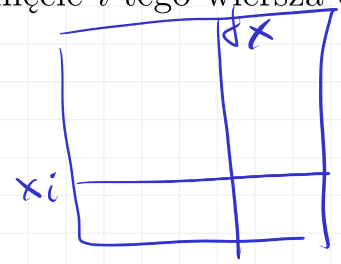
= 0

Definicja 6.4 (Minor macierzy). *Minorem macierzy M* nazywamy każdą macierz uzyskaną poprzez usunięcie z M pewnego zbioru wierszy i kolumn.

Zwyczajowo $A_{i,j}$ to macierz powstała z A poprzez usunięcie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.



A_{ij}

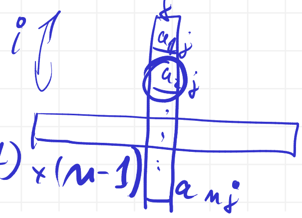


Definicja 6.5 (Dopełnienie algebraiczne). Dopełnienie algebraiczne elementu $a_{i,j}$ to $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$.

Fakt 6.6 (Rozwinięcie Laplace'a). *Dla macierzy kwadratowej $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mamy:*

Lemat

$$\underbrace{\det(A)}_{n\times n} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\underbrace{\det(A_{i,j})}_{(n-1)\times(n-1)}$$



n!

$j=1$

$$\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1) $a_{i1} = 0$

$| \quad | = 0$

2) $a_{i1} \neq 0$

el. Gaußa

zrobić i-tą kol., ale pozostałe w tej samej kol.

2 1 3 4 ...

2 3 1 4 ...

2 3 ... i $\underline{1}$

$i-1$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & a_{1n} \\ \vdots & 0 & \\ 0\,0\,0 & a_{i1} & 0\,0\,0 \\ \vdots & 0 & \\ a_{n2} & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1+j} a_{i1} \det(A_{i1})$$

rozw. L.

wyznacznik El. Gaußa

A_{i1} (

Rozwinięcie Laplace'a pozwala nam na podanie konkretnych wzorów na wyznacznik macierzy 2×2 oraz 3×3.

Przykład 6.7 (Obliczanie małych wyznaczników). Łatwo obliczyć, że wyznacznik macierzy 2×2, zadanej jako $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ to $a \cdot d - cb$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc .$$

W przypadku macierzy 3×3 możemy zastosować metodę Sarrusa.

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$

$- a_{31} a_{22} a_{13}$

Twierdzenie 6.8 (Cauchy).

kw.

$$\det(A \cdot B) = \boxed{\det(A)} \cdot \boxed{\det(B)} .$$

$A : I \to A$

doj. • det A

$A \circ B$

$|B|$

1) $rk(B) < n \Rightarrow \det(B) = 0$ $rk(AB) \leq n$ $\det(AB) = 0$

proste macierze elementarne $B \leftarrow$ macierz el.

• T_{ij} $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ BT_{ij} to B z zam. i-tą, j-tą kolumną.

$|T_{ij}| = -|Id| = -1$

$|B T_{ij}| = -|B| = |B| \cdot |T_{ij}|$

B z zam. i-tą i j-tą kolum.

2) $Id + \alpha 1_{ij}$

$\left|\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \alpha & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\right| = 1$ $|A (Id + \alpha 1_{ij})| = |A| = |A| \cdot (|Id + \alpha 1_{ij}|)$

$|D_{i\alpha}| = \alpha$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \alpha & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$|B\, D_{i\alpha}|$ ← B z i-tą kolumną przemn. przez α

$\shortparallel$

$\alpha \cdot |B|$

$\shortparallel$

$|B| \cdot |D_{i\alpha}|$

Teraz zachodzi dla B- macierzy el.

dow. B - $rk(B) = n$ odwracalna

$$B = \prod_{i=1}^{k} B_i \leftarrow \text{m. el.}$$

$$A = \prod_{i=1}^{k_A} A_i$$

$$|A \cdot B| = \left| \prod_{i=1}^{k_A} A_i \cdot \prod_{i=1}^{n} B_i \right| = \underbrace{\prod_{i=1}^{k_A} |A_i|}\ \underbrace{\prod_{i=1}^{k} |B_i|}$$

$$= |A| \cdot |B|$$

Fakt 6.9. *Wyznacznik macierzy oraz macierzy transponowanej jest taki sam, tj.:*

$$\det(A) = \det(A^T) \ .$$

1° $rk(A) < n \iff rk(A^T) < n$

$\det(A) = 0 \iff \det(A^T) = 0$

$rk(A) \neq 0$ $\quad |A^T| = \left|\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right)^T\right| = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{|E_{n-i+1}^T|}$

el.

$E \in$ el. $\quad \underline{|E|} = \underbrace{|E^T|}$

T_{ij}

$(Id + \alpha 1_{ij})^T = Id + \alpha 1_{ji}$

$= \prod_{i=1}^{n} |E_i|$

$= \left|\prod_{i=1}^{n} E_i\right|$

$= |A|$

Fakt 6.10. • *Dodanie do wiersza macierzy wielokrotności innego wiersza nie zmienia wyznacznika.*

- *Wyznacznik macierzy z zerowym wierszem jest równy* 0.
- *Wyznacznik jest funkcją wieloliniową wierszy.*
- *Zamiana dwóch wierszy miejscami zmienia znak wyznacznika na przeciwny.*

Przykład 6.11 (Wyznacznik macierzy Vandermonde'a). Niech $q_1, q_2, \ldots, q_n$ będą dowolnymi liczbami. Macierz $(n \times n)$ Vandermonde'a V_n ma wyrazy równe $\vec{v}_{ij} = q_i^{j-1}$, tj.:

$n \times n$

$q_1, q_2, \ldots, q_n$

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \ldots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \ldots & q_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \ldots & q_n^{n-1} \end{bmatrix} .$$

Pokażemy, że

parami różne

$$\det(V_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (q_j - q_i) .$$

$\det \neq 0$

W szczególności implikuje to, jeśli q_i są niezerowe i parami różne, to wyznacznik ten jest niezerowy.

$$1 \quad q_1 \quad q_1^2 \; \ldots \; q_1^{n-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i q_1^i$$

$f(q_i)$

$\sum a_i x^i$

$$\begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \ldots & q_1^{n-1} \\ 0 & q_2 - q_1 & q_2^2 - q_1^2 & \ldots & q_2^{n-1} - q_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & q_n - q_1 & q_n^2 - q_1^2 & \ldots & q_n^{n-1} - q_1^{n-1} \end{vmatrix} =$$

rozw. Lapl.

$$\begin{vmatrix} q_2 - q_1 & q_2^2 - q_1^2 & \ldots & q_2^{n-1} - q_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ q_n - q_1 & q_n^2 - q_1^2 & \ldots & q_n^{n-1} - q_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

i-tej - $q_1 \cdot$ (i-1) kol.

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 & \cdots & a_2^{n-1}-a_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ a_n-a_1 & a_n^2-a_1^2 & \cdots & a_n^{n-1}-a_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$a_1 \cdot$

$$= \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2^2-a_2a_1 & \cdots & a_2^{n-1}-a_1\cdot a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n^2-a_na_1 & & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a_2-a_1)\cdot 1 & a_2(a_2-a_1) & \cdots & a_2^{n-1}(a_2-a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n-a_1)\cdot 1 & a_n(a_n-a_1) & & a_n^{n-1}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

Liniowość dla wierszy

i-ty wiersz $\quad (a_i-a_1)$

$$= \prod_{i=2}^{n}(a_i-a_1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

wyzn. Vandermonde'a $a_2, \dots, a_n$

$$= \prod_{j=2}^{n}(a_j-a_1)\cdot\prod_{2\le i<j\le n}(a_j-a_i) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

$i=1$ $\qquad$ $i\geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2-a_1 \quad \checkmark$$

6.3 Wyznacznik a macierz odwrotna

$rk(A) = n \iff \det(A) \neq 0$
$\Updownarrow$
A - odwracalna

Fakt 6.12. *Jeśli M jest odwracalna, to*

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}.$$

$$\det(M \cdot M^{-1}) = \det(Id) = 1$$

$$\| $$

$$\underset{\neq 0}{\det(M)} \cdot \underset{\neq 0}{\det(M^{-1})}$$

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$$

Lemat 6.13. *Macierz odwrotna do macierzy A jest równa*

$$\frac{1}{\det(A)} C^T, \text{ gdzie } c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{i,j}|.$$

$O(n^3)$

$$C^T \cdot A = \det(A) Id$$

$$ij \quad \frac{1}{\det A} C^T \cdot A = Id$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (C^T)_{ik}}_{c_{ki}} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{kj} |A_{k,i}|$$

Rozwinięcie Laplace'a?

A dla i-tej kol.

$$|A| = \sum_{k=1} (-1)^{k+i} a_{ki} |A_{k,i}|$$

$i = j$ dow. rozw. Lapl. $= \det(A)$

$i \neq j$ $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ A $\quad i \neq j \quad = 0$

Przykład 6.14. Dzięki Lematowi 6.13 można np. łatwo policzyć macierz odwrotną do macierzy 2×2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} .$$

6.4 Wyznacznik przekształcenia

Potrafimy zdefiniować wyznacznik dla macierzy, ale co z przekształceniem liniowym? Każde przekształcenie zadaje macierz, ale ta macierz zależy od bazy. Okazuje się, że wartość wyznacznika nie.

Lemat 6.15. *Niech $F : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym, zaś M, M' będą macierzami dla tego przekształcenia wyrażonymi w rożnych bazach. Wtedy*

B , B'

$$\underline{|M_{BB}(F)|} = \underline{|M_{B'B'}(F)|}$$

$$|M| = |M'|.$$

BB'

$v_1 \dots v_n$

$\frac{1}{2}v_1 \dots \frac{1}{2}v_n$

$M(\mathrm{Id})$ $2\,\mathrm{Id}$

$$M_{BB'} = M_{B'B}^{-1}$$

$$|M_{BB}(F)| = |M_{B'B}| \cdot |M_{B'B'}(F)| \cdot |M_{BB'}|$$

$$= |M_{B'B'}(F)|$$