# Lista 6

**Zadanie 1.** Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ są różnymi wartościami własnymi macierzy $M$, to suma (mnogościowa) baz przestrzeni $\mathbb{V}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbb{V}_{\lambda_k}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

Wywnioskuj z tego, że $\mathbb{V}_{\lambda_1} \cap \mathrm{LIN}(\bigcup_{i=2}^{k} \mathbb{V}_{\lambda_i}) = \{\vec{0}\}$.

*Wskazówka:* Najprościej przez indukcję dodając pojedyncze wektory.

**Zadanie 2.** Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:

- $L((x, y, z)) = (2x - y, 0, y + z)$;
- $L'((x, y, z)) = (0, 0, y)$;
- $L''(x, y, z) = (y + z, x + 2z, 0)$.

*Wskazówka:* Czasami może być prościej wprost, bez przechodzenia przez macierze.

**Zadanie 3.** Znajdź wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne dla poniższych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dla jednej z wartości oblicz odpowiadające wektory własne.

**Zadanie 4.** Niech $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że $\ker A$ oraz $\mathrm{Im}\, A$ są przestrzeniami niezmienniczymi $A$.

**Zadanie 5 (* nie liczy się do podstawy).** Dla wielomianu $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ możemy zdefiniować naturalnie wartość tego wielomianu na macierzy kwadratowej, jako $\varphi(M) = \sum_{i=0}^{k} a_i M^i$, gdzie $M^0 = \mathrm{Id}$.

Niech $M = AJA^{-1}$, gdzie $J$ jest macierzą Jordana (tzn. na przekątnej ma klatki Jordana), zaś $\varphi_M$ jej wielomianem charakterystycznym. Pokaż, że $\varphi_M(M)$ jest macierzą zerową.

(W pełnej ogólności to zadanie powinno mówić, że $A, J$ są macierzami nad $\mathbb{C}$, ale w zasadzie nic nie zmienia to w dowodzie: wystarczy, że pokażesz to dla $\mathbb{R}$.)

**Zadanie 6.** Niech $w$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Pokaż, że dla liczby zespolonej $\alpha$ mamy $w(\overline{\alpha}) = \overline{w(\alpha)}$ (gdzie $\bar{\cdot}$ to sprzężenie).

Wywnioskuj z tego, że jeśli $w$ ma pierwiastek zespolony $\beta$, to $\overline{\beta}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Wywnioskuj z tego, że jeśli macierz o współczynnikach rzeczywistych (traktowana jako macierz o współczynnikach zespolonych) ma zespoloną wartość własną $\beta$, to ma też wartość własną $\overline{\beta}$.

Udowodnij, że w tym przypadku, jeśli wektor o współczynnikach zespolonych $\vec{V} = [v_1, \ldots, v_n]^T$ jest wektorem własnym dla zespolonej wartości własnej $\beta$, to $\overline{\vec{V}} = [\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n]^T$ jest wektorem własnym dla zespolonej wartości własnej $\overline{\beta}$.

**Zadanie 7.** Pokaż, że:

- suma macierzy symetrycznych jest macierzą symetryczną;
- iloczyn macierzy symetrycznych $A, B$ jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BA$;
- jeśli macierz symetryczna jest odwracalna, to jej macierz odwrotna jest symetryczna.

**Zadanie 8.** Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy kolumnowo stochastycznych (dodatnich) jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Niech $M_1, \ldots, M_k$ będą macierzami kolumnowo stochastycznymi (dodatnimi) oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liczbami nieujemnymi, spełniającymi $\sum_i \alpha_i = 1$. Pokaż, że

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i$$

też jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

**Zadanie 9.** Niech $A$ będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że zachowuje ona sumę współrzędnych, tzn. dla wektora $(v_1, \dots, v_n)^T$ niech $(w_1, \dots, w_n)^T = A(v_1, \dots, v_n)^T$ pokaż, że

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \ .$$

**Zadanie 10.** Niech $A$ będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną. Pokaż, że $A$ nie ma wartości własnej $-1$.

*Wskazówka:* Rozpatrz $A^2$. Jaka jest krotność geometryczna wartości własnej 1? Możesz korzystać z Twierdzeń udowodnionych na wykładzie.

**Zadanie 11.** Niech $A$ będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną, potraktujmy ją jako macierz liczb zespolonych. Pokaż analogicznie do dowodu na wykładzie, że jeśli $A$ ma (zespoloną) wartość własną o module 1, to wektor własny tej wartości własnej jest postaci $\alpha\vec{V}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C}$ oraz $\vec{V} > 0$.