Lista 7

Zadanie 1. Niech A będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że dla wektora $\vec{V}$

$$\|A\vec{V}\|_1 \leq \|\vec{V}\|_1 \quad .$$

Zadanie 2. Niech A będzie macierzą kolumnowo stochastyczną. Pokaż, że A nie ma wartości własnej o module większym niż 1.

Wskazówka: Rozpatrz A^k dla dowolnie dużego k i skorzystać z Zadania 1.

Zadanie 3. Niech A będzie macierzą stochastyczną dodatnią (rozmiaru $n \times n$) a $\mathbb{V}_1$ będzie przestrzenią wektorów własnych dla wartości własnej 1. Pokaż, że $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_{=0} = \{\vec{0}\}$ oraz $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_{=0} = \mathbb{R}^n$.

(Dla przypomnienia: $\mathbb{V}_{=0}$ to podprzestrzeń wektorów o sumie współrzędnych równej 0.)

Zadanie 4. Rozważmy graf o wierzchołkach $\{1, 2, 3, 4\}$ i krawędziach skierowanych $1 \to 2$, $1 \to 3$, $1 \to 4$, $2 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 1$, $4 \to 3$. Jak wygląda znormalizowana macierz sąsiedztwa tego grafu? Oblicz PageRank tego grafu dla $m = 0,25$.

Zadanie 5. To zadanie pokazuje, że iteracyjna metoda obliczania PageRanku zbiega wykładniczo szybko.

Niech A będzie macierz stochastyczną (niekoniecznie dodatnią!) rozmiaru $n \times n$ a P macierzą stochastyczną $n \times n$ postaci

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \quad .$$

Dla liczby rzeczywistej $0 \leq m \leq 1$ niech M_m oznacza macierz

$$M_m = (1-m)A + mP \quad .$$

Pokaż, że dla wektora $\vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$ zachodzi

$$\|M_m\vec{V}\|_1 \leq (1-m)\|\vec{V}\|_1 \quad .$$

Wskazówka: Pokaż najpierw dla $m = 0$ oraz $m = 1$, dla $m = 0$ skorzystaj z Zadania 1.

Zadanie 6. Pokaż, że dla dowolnej macierzy kwadratowej M (odpowiedniego rozmiaru) zachodzi

$$\vec{U} \cdot M\vec{V} = M^T\vec{U} \cdot \vec{V} \quad ,$$

gdzie $\cdot$ oznacza standardowy iloczyn skalarny.

Zadanie 7. Niech M będzie macierzą symetryczną (tj. $M = M^T$). Pokaż, że

$$\vec{U} \cdot M\vec{V} = M\vec{U} \cdot \vec{V}$$

(zakładamy, że wymiary się zgadzają).

Wywnioskuj z tego, że jeśli $\lambda \neq \lambda'$ są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych $\vec{V}$ oraz $\vec{U}$, to $\vec{V} \cdot \vec{U} = 0$, tj. $\vec{V}$ i $\vec{U}$ są prostopadłe.

Zadanie 8. Udowodnij nierówność

$$\vec{U} \cdot \vec{V} \leq \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\|$$

dla $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^n$.

Wskazówka: Rozważ najpierw $\vec{U} \perp \vec{V}$, potem liniowo zależne a potem dowolne.

Zadanie 9. Udowodnij, że w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym dla dowolnej pary wektorów $\vec{U}, \vec{V}$ zachodzi

$$\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| \quad \Longleftrightarrow \quad (\vec{U} - \vec{V}) \perp (\vec{U} + \vec{V}) \quad .$$

Zinterpretuj ten fakt jako stwierdzenie: „przekątne równoległoboku są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy równoległobok ten jest rombem”.

Wskazówka: Wyraź $\vec{U}, \vec{V}$ przez $\vec{U} - \vec{V}, \vec{U} + \vec{V}$.

Zadanie 10. Dla podanych poniżej układów wektorów podaj bazy dopełnień ortogonalnych przestrzeni liniowych przez nie generowanych:

- $[1, 0, 1]^T, [2, 3, 1]^T$ nad $\mathbb{R}$;
- $[1, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 1]$ nad $\mathbb{Z}_2$;
- $[1, 0, 2]$ nad $\mathbb{Z}_3$.

Uwaga: w przestrzeniach $\mathbb{Z}_p^n$ dopełnienie ortogonalne $\mathbb{W}^\perp$ może nie być rozłączne z $\mathbb{W}$, może nawet zachodzić równość $\mathbb{W}^\perp = \mathbb{W}$.

Zadanie 11 (* nie liczy się do podstawy, choć nietrudne). Pokaż, że dla każdego kodu liniowego istnieje kod mu równoważmy, który ma kodowanie systematyczne.

Wskazówka: Eliminacja Gaußa na kolumnach.