Lista 8

Zadanie 1. Rozpatrzmy przestrzeń liniową wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia najwyżej 3. Zdefiniujmy iloczyn skalarny jako
$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x \ .$$
Oblicz iloczyny skalarne $\langle x^i, x^j\rangle$ dla $0 \leq i \leq j \leq 3$.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną). Udowodnij, że dla zbioru wektorów $U \subseteq V$ zachodzi
$$U^{\perp} = (\mathrm{LIN}(U))^{\perp} \quad \text{oraz} \quad (U^{\perp})^{\perp} = \mathrm{LIN}(U) \ .$$

Zadanie 3 (Macierz Grama)**.** Zdefiniujmy macierz Grama układu wektorów $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ w przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{V}$ wymiaru k jako
$$G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}) = (\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle)_{i,j=1,\dots,k} \ .$$
Niech $B = \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{V}$. Zdefiniujmy macierz $A = [(\vec{v}_1)_B \,|\, (\vec{v}_2)_B \,|\, \dots \,|\, (\vec{v}_k)_B]$, tj. macierz, której j-ta kolumna to wektor z $\mathbb{R}^n$ będący wyrażeniem $\vec{v}_j$ w bazie B. Pokaż, że
$$G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}) = A^T A \ .$$

Korzystając z tej reprezentacji udowodnij, że

- $\det(G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}))$ jest nieujemny
- $\det(G(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\})) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ jest liniowo zależny.

Komentarz: Założenie, że wymiar przestrzeni i liczba wektorów w układzie są takie sama nie jest potrzebne, ale ułatwia rachunki.

Zadanie 4 (Nierówność Bessela; równość Parsevala)**.** Niech $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ będą układem ortonormalnym, tj.:

- $\forall i\ \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i\rangle = 1$;
- $\forall i \neq j\ \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle = 0$.

(Nie zakładamy, że jest bazą).

Pokaż, że dla dowolnego wektora v:
$$\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{e}_i, v\rangle|^2 \leq ||\vec{v}||^2 \ .$$
Co więcej, $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\vec{v}$ zachodzi równość.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową, zaś $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leq \mathbb{V}$ jej podprzestrzeniami (z tym samym iloczynem skalarnym). Pokaż, że:

- $\mathbb{V}_1 \leq \mathbb{V}_2 \iff \mathbb{V}_1^{\perp} \geq \mathbb{V}_2^{\perp}$,
- $(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^{\perp} = \mathbb{V}_1^{\perp} \cap \mathbb{V}_2^{\perp}$,
- $(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)^{\perp} = \mathbb{V}_1^{\perp} + \mathbb{V}_2^{\perp}$.

Zadanie 6 (* nie liczy się do podstawy; w sumie łatwe, ale coś musi mieć gwiazdkę...)**.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ a $\langle \cdot, \cdot\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na tej przestrzeni. Niech $B = \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{V}$ a $P : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ rzutem prostopadłym na podprzestrzeń jednowymiarową $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$.

Pokaż, że suma kwadratów długości rzutów prostopadłych wektorów z B na $\mathbb{W}$ wynosi 1, tj.:
$$\sum_{i=1}^{n} \|P\vec{b}_i\|^2 = 1 \ .$$

Wskazówka: Wyraź rzut przez bazę ortonormalną $\mathbb{W}$.

Zadanie 7. Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów jako

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\mathrm{d}x \ .$$

Dokonaj ortonormalizacji (dowolnej) bazy przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 2.

Zrzutuj prostopadle na tą przestrzeń wielomiany x^3 oraz $x^3 - x^2 + x - 1$.

Wskazówka: Do drugiej części: to jest *rzut*. Co więcej, rzut jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 8. Uzupełnij do bazy a następnie zortonormalizuj podane układy wektorów:

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Zadanie 9. Pokaż, że „rzut prostopadły nie zwiększa długości": niech P będzie rzutem prostopadłym na $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Wtedy dla każdego $\vec{v} \in \mathbb{V}$ zachodzi

$$\|\vec{v}\| \geq \|P\vec{v}\|$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{v} \in \mathbb{W}$.

Zadanie 10. Dokonaj ortonormalizacji baz:

- $(1, 2, 2), (1, 1, -5), (3, 2, 8)$;
- $(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (2, 0, 1)$.

Zadanie 11. Pokaż, że symetria względem przestrzeni $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^n$ wyraża się wzorem

$$2P_{\mathbb{W}} - \mathrm{Id} \ ,$$

gdzie $P_{\mathbb{W}}$ to rzut prostopadły na $\mathbb{W}$, zaś Id to przekształcenie identycznościowe.

Wskazówka: Pokaż na odpowiednio dobranej bazie.