# Lista 9

**Zadanie 1.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową, zaś $A$ jej bazą. Pokaż, że jeśli baza $B$ powstaje z bazy $A$ przez ortonormalizację Grama-Schmidta, to $M_{BA}$ i $M_{AB}$ są macierzami górnotrójkątnymi.

**Zadanie 2.** Niech $\mathbb{V}$: przestrzeń liniowa z iloczynem skalarnym, $B$: baza $\mathbb{V}$, a $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$: przekształcenie liniowe. Pokaż, że $F$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\vec{u},\vec{v}\in B} \langle F(\vec{u}), F(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \quad ,$$

tj. gdy $F$ zachowuje iloczyn skalarny wektorów z bazy.

**Zadanie 3.** Pokaż, że następujące przekształcenia są izometriami.

- obrót o kąt $\alpha$ na płaszczyźnie
- zamiana jednej ze współrzędnych (w bazie ortonormalnej) na przeciwną. (Przez „współrzędne” rozumiemy standardowe współrzędne $\mathbb{R}^n$.)
- symetria względem podprzestrzeni
  *Przypomnienie:* symetria względem $\mathbb{W}$ wyraża się jako $2P_{\mathbb{W}} - \mathrm{Id}$, gdzie $P_{\mathbb{W}}$ to rzut na $\mathbb{W}$.

**Zadanie 4** (Nierówność Hadamarda)**.** Niech $M$ będzie macierzą kwadratową a $C_1, \dots, C_n$ jej kolumnami.

Pokaż, że jeśli $C_1, \dots, C_n$ jest układem ortogonalnym, to

$$|\det(M)| = \prod_{i=1}^{n} \|C_i\| \quad ,$$

gdzie $\|\cdot\|$ to długość w standardowym iloczynie skalarnym.

Następnie pokaż, że w ogólności (tzn. bez założenia, że $C_1, \dots, C_n$ są układem ortogonalnym) zachodzi

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|C_i\| \quad .$$

*Wskazówka*: W pierwszym punkcie: ile wynosi $\det M$? W drugim: potraktuj kolumny $M$ jako wektory i przeprowadź ortonormalizację. Co się dzieje ze stronami nierówności?

**Zadanie 5.** Sprawdź, czy podane poniżej macierze są dodatnio określone:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad .$$

**Zadanie 6** (Algorytm Cholesky'ego)**.** Wiemy, że macierz dodatnio określoną $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ można przedstawić jako iloczyn $A^T A$, gdzie $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ jest macierzą górnotrójkątną.

Podaj algorytm obliczania $A$ korzystający z tego rozkładu. Jaki jest jego czas działania?

*Wskazówka*: Obliczaj $A$ kolejnymi kolumnami, od lewej do prawej i z góry na dół.

**Zadanie 7.** Przedstaw poniższe macierze dodatnio określone w postaci $B^T B$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad .$$

*Wskazówka*: Dla przypomnienia: jako macierz $B$ możesz wziąć macierz $M_{EA}$, gdzie $E$ to baza standardowa, zaś $A$: baza ortonormalna.

**Zadanie 8** (Nie liczy się do podstawy)**.** Pokaż, że symetryczna macierz $n \times n$ liczb rzeczywistych jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy ma same dodatnie wartości własne.

*Wskazówka*: Wiemy, że dla macierzy symetrycznej suma krotności geometrycznych jej wartości własnych to $n$. Rozpatrz macierz Grama dla bazy ortogonalnej.

**Zadanie 9.** Na podstawie poniższych tabel działań określ, który zbiór z działaniem jest grupą.

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & a & c \\ c & c & a & b \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & b & c & a \\ b & a & b & c \\ c & c & a & b \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} \cdot & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & b & a & c \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} \cdot & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & d & a & c \\ c & c & a & d & b \\ d & d & b & a & c \end{array}.$$

**Zadanie 10.** Podaj tabelkę działań grupy obrotów i symetrii kwadratu.

**Zadanie 11.** Rozważamy trzy grupy:

1. grupą symetrii trójkąta równobocznego (trzy obroty i trzy symetrie osiowe);
2. grupą obrotów sześciokąta foremnego;
3. grupą $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (czyli z dodawaniem $\bmod 6$).

Przedstaw ich tabelki działań. Które z tych grup są izomorficzne?