Lista 10

Zadanie 1. Które z zbiorów z działaniem są grupami?

1. zbiór liczb naturalnych, z dodawaniem;
2. zbiór liczb całkowitych, z mnożeniem;
3. zbiór liczb postaci $\frac{1}{k}$, gdzie $k \geq 0$ jest całkowite, z mnożeniem;
4. zbiór liczb wymiernych, z dodawaniem;
5. zbiór liczb wymiernych bez zera, z mnożeniem.

Zadanie 2. Rozważmy grupę G i zdefiniujmy w niej *sprzężenie* (względem elementy g) $\varphi_g : G \to G$:

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1} \quad .$$

Pokaż, że

- $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$;
- φ_a jest izomorfizmem z G w G;
- jeśli $H \leq G$ to $\varphi_a(H) \leq G$ (podgrupa sprzężona).

Zadanie 3. Pokaż, że dla $x_1, \ldots, x_k$: elementów grupy G oraz liczb całkowitych $z_1, \ldots, z_k$ zachodzi:

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \cdots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k} (x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}} \cdots (x_1^{-1})^{z_1} = (x_k)^{-z_k} (x_{k-1})^{-z_{k-1}} \cdots (x_1)^{-z_1} \quad .$$

Zadanie 4. Pokaż, że równość

$$(ab)^r = a^r b^r$$

zachodzi dla dowolnego r (naturalnego) oraz dowolnych $a, b \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G jest przemienna.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie izomorfizmy pomiędzy grupą obrotów kwadratu, a grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

Wskazówka: Pokaż, że izomorfizm zachowuje rząd elementu.

Zadanie 6. Pokaż, że jeśli każdy element w grupie jest odwrotny do siebie, to grupa jest przemienna.

Zadanie 7. Pokaż, że, z dokładnością do izomorfizmu, istnieje tylko jedna grupa trzyelementowa (dokładniej: $(\mathbb{Z}_3, +)$) oraz dwie grupy czteroelementowe: $(\mathbb{Z}_4, +)$ oraz $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ z dodawaniem po współrzędnych.

Wskazówka: W drugim punkcie: jakie są możliwe rzędy elementów?

Zadanie 8. Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G.

- Pokaż, że $H_1 \cup H_2$ nie musi być podgrupą G.
- Pokaż, że jeśli $H_1 \cup H_2$ jest podgrupą G, to $H_1 \leq H_2$ lub $H_2 \leq H_1$.
- Pokaż, że jeśli G jest przemienna, to $\langle H_1 \cup H_2 \rangle = \{h_1 h_2 \ : \ h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2\}$.
  (Dla przypomnienia: $\langle A \rangle$ to najmniejsza grupa generowana przez A.)

Zadanie 9 (Nie liczy się do podstawy). Pokaż, że podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

Wskazówka: Rozważ najmniejszą potęgę generatora, która należy do podgrupy. Pokaż, że jest to generator.

Zadanie 10. Centralizatorem elementu a w grupie G nazywamy zbiór elementów przemiennych z a, czyli

$$G(a) = \{b \in G \ : \ ab = ba\} \quad .$$

Centrum grupy G nazywamy zbiór

$$Z(G) = \{a \ : \ \forall b \in G : \ ab = ba\}$$

(czyli: przemiennych ze wszystkimi elementami w G). Udowodnij, że dla dowolnej grupy G i elementu a centralizator $G(a)$ oraz centrum $Z(G)$ są podgrupami G. Pokaż też, że

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} G(g) \quad .$$

Zadanie 11. Pokaż, że zbiór symetrii trójkąta równobocznego jest izomorficzny z grupą wszystkich permutacji zbioru trzyelementowego S_3.