Zadanie 3 (* nie liczy się do podstawy)**.** Dla macierzy $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ rozpatrzmy funkcje:

$$f((a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \ ,$$

$$f'((a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \ .$$

Pokaż, że obie definiują wyznacznik.

Wskazówka: Możesz np. sprawdzić, że spełnia aksjomaty wyznacznika. Tylko zamiana kolumn jest nietrywialna: rozpatrz, jak zmienia się znak konkretnego iloczynu po zamianie kolumn.

Rozwiązanie Pokażemy to dla funkcji

$$f((a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \ ,$$

dla drugie dowód przebiega analogicznie po wiersza, a nie jak tu po kolumnach.

Dla wyrobienia intuicji zauważmy, że dla ustalonego σ wartość

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

oznacza, że w pierwszej kolumnie macierzy wybieramy element o numerze $\sigma(1)$ $(a_{\sigma(1)1})$, w drugiej: o numerze $\sigma(2)$ $(a_{\sigma(2)2})$, itd. i na koniec mnożymy wszystkie wybrane tak. Jako że sumujemy po wszystkich możliwych permutacjach, oznacza to, że sumujemy po wszystkich możliwych takich wyborach (z odpowiednim znakiem).

Trzeba pokazać, żę tak zdefiniowana funkcja spełnia aksjomaty wyznacznika. Pokażmy najpierw liniowość (po kolumnach). Niech $A = [\vec{A}_1|\cdots|\vec{A}_n]$ oraz $A' = [\vec{A}_1|\cdots|\vec{A}_{i-1}|\vec{A}_i + \vec{A}'_i|A_{i+1}|\cdots|A_n]$ oraz $A'' = [\vec{A}_1|\cdots|\vec{A}_{i-1}|\vec{A}'_i|A_{i+1}|\cdots|A_n]$; oznaczmy elementy tych macierzy: $A = (a_{ij})$, $A' = (a'_{ij})$ i $A'' = (a''_{ij})$. Wtedy

$$\begin{aligned}
f((a'_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a'_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a'_{\sigma(1),1} \cdots a'_{\sigma(i-1),i-1} a'_{\sigma(i),i} a'_{\sigma(i+1),i+1} \cdots a'_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i-1),i-1} (a_{\sigma(i),i} + a''_{\sigma(i),i}) a_{\sigma(i+1),i+1} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i-1),i-1} a_{\sigma(i),i} a_{\sigma(i+1),i+1} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&+ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i-1),i-1} a''_{\sigma(i),i} a_{\sigma(i+1),i+1} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= f(A) + f(A')
\end{aligned}$$

Analogicznie pokazujemy dla mnożenia przez skalar.

Kolejny aksjomat: $f(\mathrm{Id}) = 1$. łatwo sprawdzić, że

$$a_{\sigma(i),i} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{jeśli } \sigma(i) \neq i \end{cases}$$

W takim razie

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli dla każdego } i \ \sigma(i) = i \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

czyli iloczyn jest niezerowy (i równy 1) tylko dla $\sigma = \mathrm{Id}$ i tym samym

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{Id}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= \operatorname{sgn}(e) \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Pozostaje pokazać, że zamiana kolumn w macierzy zmienia znak wyznacznika na przeciwny. Oznaczmy jako macierze $A' = (a'_{i,j})$ macierz uzyskaną z $A = (a_{i,j})$ poprzez zamianę k-tej ℓ-tej kolumny. Wtedy

$$\begin{aligned} f((a'_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a'_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(k-1),k-1} a_{\sigma(k),\ell} a_{\sigma(k+1),k+1} \cdots a_{\sigma(\ell-1),\ell-1} a_{\sigma(\ell),k} a_{\sigma(\ell+1),\ell+1} \cdots a_{\sigma(n),n} \end{aligned}$$

Zamieniamy miejscami elementy k-ty oraz ℓ-ty w iloczynie

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(k-1),k-1} a_{\sigma(\ell),k} a_{\sigma(k+1),k+1} \cdots a_{\sigma(\ell-1),\ell-1} a_{\sigma(k),\ell} a_{\sigma(\ell+1),\ell+1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Zauważmy teraz, że skoro sumujemy po wszystkich permutacjach, to zamiast sumować po σ, możemy sumować po $\sigma(k,l)$, gdzie (k,ℓ) oznacza tu inwersję. Co więcej, suma dalej może być co σ, bo przemnożenie przez (k,ℓ) to bijekcja na zbiorze permutacji

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma(k,\ell)) a_{\sigma(k,\ell)(1),1} \cdots a_{\sigma(k,\ell)(k-1),k-1} a_{\sigma(k,\ell)(\ell),k} a_{\sigma(k,\ell)(k+1),k+1} \cdots \\ &\cdots a_{\sigma(k,\ell)(\ell-1),\ell-1} a_{\sigma(k,\ell)(k),\ell} a_{\sigma(k,\ell)(\ell+1),\ell+1} \cdots a_{\sigma(k,\ell)(n),n} \end{aligned}$$

Teraz pozostaje zauważyć, że $(k,\ell)(i) = i$ dla $i \notin \{k,\ell\}$ oraz że przemnożenie przez inwersję zmienia znak permutacji

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma \in S_n} -\operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(k-1),k-1} a_{\sigma(k),k} a_{\sigma(k+1),k+1} \cdots a_{\sigma(\ell-1),\ell-1} a_{\sigma(\ell),\ell} a_{\sigma(\ell+1),\ell+1} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= -f(A) \end{aligned}$$