Lista 14

Zadanie 1. Oblicz wartości podanych wielomianów w punktach w odpowiednich pierścieniach:

$$x^4 + 3x^2 - 2x + 1 \text{ w } 2, \text{ w } \mathbb{Z}_7; \quad 2x^3 - x^2 + x - 2 \text{ w } 1, \text{ w } \mathbb{Z}_3; \quad 3x^4 - 3x^3 + 4x - 5 \text{ w } 2, \text{ w } \mathbb{Z}_6$$

Zadanie 2. Podaj wszystkie nierozkładalne wielomiany stopnia 2 oraz 3 w $\mathbb{Z}_2[x]$ oraz wszystkie nierozkładalne wielomiany stopnia 2 nad $\mathbb{Z}_3$.

Zadanie 3 (* Nie liczy się do podstawy). Celem tego zadania jest pokazanie, że wielomiany nierozkładalne w $\mathbb{R}[x]$ są stopnia najwyżej 2. Możesz korzystać z (nie tak prostego) twierdzenia, że wielomiany nierozkładalne nad $\mathbb{C}[x]$ są stopnia najwyżej 1. W tym zadaniu utożsamiamy wielomian z jego wartościowaniem a $\overline{x}$ będzie oznaczać sprzężenie (w $\mathbb{C}$) liczby zespolonej x.

Ustalmy wielomian $f \in \mathbb{R}[x]$.

- Pokaż, że dla liczby zespolonej c zachodzi $f(\overline{c}) = \overline{f(c)}$.
- Wywnioskuj z tego, że jeśli $c \in \mathbb{C}$ jest miejscem zerowym wielomianu f, to jest nim też $\overline{c}$.
- Pokaż, że wielomian $(x - c)(x - \overline{c})$ ma współczynniki rzeczywiste.
- Wywnioskuj z tego, że jeśli f jest nierozkładalny (w $\mathbb{R}[x]$), to jest stopnia najwyżej 2.

Zadanie 4. Pokaż, że dla liczby pierwszej p istnieje wielomian nierozkładalny stopnia 2 w $\mathbb{Z}_p[x]$.

Wskazówka: Zlicz wszystkie wielomiany stopnia 2 w $\mathbb{Z}_p[x]$ oraz wszystkie rozkładalne wielomiany stopnia 2 w $\mathbb{Z}_p[x]$: zauważ, że muszą się one rozkładać na wielomiany stopnia 1.

Zadanie 5. Udowodnij uogólnienie twierdzenia z wykładu: jeśli $f, g \in \mathbb{F}[x]$ mają oba stopień conajwyżej k, k' wspólnych pierwiastków oraz k'' takich samych wiodących współczynników, przy czym $k' + k'' > k$, to $f = g$.

Zadanie 6. Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem skończonym o n elementach. Pokaż, że w $\mathbb{F}[x]$ prawdziwa jest zależność:

$$x^n - x = \prod_{a \in \mathbb{F}} (x - a)$$

Wskazówka: Porównaj pierwiastki obydwu wielomianów oraz ich wiodące współczynniki.

Zadanie 7. W ciele $\mathbb{F}$ rozważmy kolejne sumy

$$1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots \ ,$$

gdzie 1 jest elementem neutralnym dodawania. Niech k będzie najmniejszą taką liczbą, że $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k \text{ razy}} = 0$.

Pokaż, że jeśli takie skończone k istnieje, to jest liczbą pierwszą. (Może nie istnieć, np. w liczbach wymiernych).

Takie k nazywamy *charakterystyką ciała.*

Zadanie 8. Dla podanych poniżej wielomianów $f, g \in \mathbb{Z}_5[x]$ o współczynnikach z $\mathbb{Z}_5$ podziel (z resztą) f przez g i wyraź $\mathrm{nwd}(f, g)$ w postaci $af + bg$, gdzie a, b również są wielomianami z tego pierścienia:

$$f = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3 \quad g = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x + 3 \ .$$

Wskazówka: Może być pomocne, że dla $f, g \in \mathbb{Z}_5[x]$ i $c, c' \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$ zachodzi $\mathrm{nwd}(f, g) = \mathrm{nwd}(cf, c'g)$.

Zadanie 9. Operację różniczkowania wielomianów nad ciałem $\mathbb{F}$ definiujemy analogicznie, jak w przypadku liczb rzeczywistych, tzn. $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)' = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$, formalnie

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n, 0)$$

przy czym „i” w „ia_i” rozumiemy tu jako element w $\mathbb{F}$ uzyskany poprzez i-krotne dodanie 1 (elementu neutralnego mnożenia) w ciele $\mathbb{F}$, tzn. $i = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{i \text{ razy}}$.

Udowodnij, że w dowolnym pierścieniu wielomianów $\mathbb{F}[x]$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$ różniczkowanie ma te same własności, co w przypadku współczynników rzeczywistych, tzn.:

- jest liniowe: $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ dla $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $f, g \in \mathbb{F}[x]$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ dla $f, g \in \mathbb{F}[x]$;
- $(x - \alpha)^k = k(x - \alpha)^{k-1}$.

Wskazówka: Przy dowodzeniu drugiego punktu skorzystaj z punktu pierwszego i sprowadź problem do przypadku, w którym $f = x^k$, $g = x^\ell$.

Zadanie 10. Udowodnij, że dla wielomianu $f \in \mathbb{F}[x]$ jeśli liczba $\alpha \in \mathbb{F}$ jest pierwiastkiem k-krotnym tego wielomianu, to

$$\overline{f}(\alpha) = \overline{f'}(\alpha) = \overline{f''}(\alpha) = \cdots = \overline{f^{(k-1)}}(\alpha) = 0 \ .$$

Zadanie 11. Rozważmy wielomiany o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$. Dla jakich a, b wielomian

$$X^5 + aX^3 + b$$

ma pierwiastek podwójny (dopuszczamy większe krotności), jeśli

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$?
- $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3$?
- $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5$?

Możesz skorzystać z Zadania 10, nawet jeśli nie umiesz go udowodnić.

Wskazówka: Rozważ osobno przypadki $a = 0$ oraz $b = 0$. Pomocne też może być Zadanie 6. Ponadto dla ciał skończonych być może konieczne będzie sprawdzenie dla ustalonych a, b wszystkich potencjalnych pierwiastków ręcznie.