Algebra 2020/21 — Egzamin poprawkowy

Czas: 180 minut.

Liczba zadań: 9.

Każde zadanie należy oddać w osobnym pliku. W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; *zadanie nie spełniające tego warunku mogą nie być sprawdzane.* W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Zadanie 1.

Dane są dwa układy wektorów S, T w przestrzeni $\mathbb{R}^5$ (nad ciałem $\mathbb{R}$):

$$
\begin{aligned}
S &= \{[-1,4,-2,-3,-1]^T, [3,3,1,-4,3]^T\} \\
T &= \{[1,-1,-1,0,1]^T, [3,0,4,-1,3]^T\} \ .
\end{aligned}
$$

Ile wynoszą wymiary $\mathrm{LIN}(S \cup T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$? Podaj dowolną bazę $\mathrm{LIN}(S \cup T)$.

Zadanie 2.

Rozpatrzmy następujący układ równań o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}_{17}$. Ile ma on rozwiązań w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_{17}$?

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
\lambda x & & & - & z & = & 0 \\
2x & + & y & & & = & \lambda \\
(4-\lambda)x & + & 2y & + & \lambda z & = & 2
\end{array}
\right. .
$$

Zadanie 3.

Znajdź wartości własne poniższej macierzy (o elementach z ciała $\mathbb{R}$), ich krotności algebraiczne i geometryczne.

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} .
$$

Zadanie 4.

Dla wektora o współrzędnych rzeczywistych niech $\sum \vec{V}$ oznacza sumę jego współrzędnych.

Niech A będzie macierzą kwadratową o elementach będących nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Pokaż, że A jest kolumnowo stochastyczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wektora $\vec{V}$ (odpowiedniego wymiaru) zachodzi

$$
\sum \vec{V} = \sum (A\vec{V}) \ .
$$

Zadanie 5.

Pokaż, że macierz rzutu prostopadłego (dla standardowego iloczynu skalarnego) na przestrzeń $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^n$ (nad ciałem $\mathbb{R}$) jest macierzą symetryczną.

Wskazówka: Przypomnij sobie, że dla macierzy kwadratowej M i wektorów $\vec{U}, \vec{V}$ odpowiedniego wymiaru zachodzi $\vec{U} \cdot \left(M\vec{V}\right) = \left(M^T\vec{U}\right) \cdot \vec{V}$. Jak można scharakteryzować macierz symetryczną przy użyciu iloczynu skalarnego? Użyj odpowiedniej bazy ortonormalnej.

Zadanie 6.

Niech $a > 1$ będzie dowolną liczbą naturalną, zaś φ oznacza funkcję Eulera. Wyraź $\varphi(a^k)$ przy użyciu $\varphi(a)$.

Zadanie 7.
Rozpatrzmy uogólnioną planszę do gry w kółko i krzyżyk na planszy 5×5, tj. na każdym polu planszy 5×5 może znajdować się kółko, krzyżyk lub pole może być puste.

Dwie plansze do gry uznajemy za równoważne, jeśli jedną można uzyskać poprzez wykonanie pewnej liczby operacji: obracanie, odbicie (symetrię), zamianę miejscami symboli graczy (tj. wszystkie kółka wymieniamy na krzyżyki a wszystkie krzyżyki na kółka). Formalnie, działamy grupą $D_4 \times \mathbb{Z}_2$, gdzie D_4 jest grupą obrotów i symetrii kwadratu; dla danej planszy zastosowanie na niej elementu $(g, 0)$ powoduje obrót lub symetrię g zaś element $(e, 1)$ powoduje wymianę wszystkich kółek na krzyżyki i wszystkich krzyżyków na kółka; zastosowanie elementu $(g, 1)$ uzyskujemy poprzez wykonanie najpierw $(g, 0)$ a potem $(e, 1)$ (równoważnie: najpierw $(e, 1)$ a potem $(g, 0)$). (Nie musisz pokazywać, że to jest poprawnie określone działanie).

Ile jest nierównoważnych uogólnionych plansz do gry w kółko i krzyżyk?

Zadanie 8.
Podziel z resztą poniższe wielomiany $f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$ o współczynnikach z $\mathbb{Z}_3$. Oblicz też ich największy wspólny dzielnik i przedstaw go w postaci $af + bg$ dla odpowiednich wielomianów $a, b \in \mathbb{Z}_3[x]$ o współczynnikach z $\mathbb{Z}_3$.

$$f = x^6 + 2x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$
$$g = x^5 + 2x^4 + x + 2 \ .$$

Zadanie 9.
Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem o charakterystyce skończonej p a $f \in \mathbb{F}[x]$ wielomianem o współczynnikach z $\mathbb{F}$. Niech f ma współczynniki $(f_0, \dots, f_n)$ oraz niech α będzie pierwiastkiem f. Zdefiniujmy f' o współczynnikach $(f_0^p, \dots, f_n^p)$. Pokaż, że α^p jest pierwiastkiem f'.

Wskazówka: co wiesz o przekształceniu $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ zadanym jako $\varphi(a) = a^p$?