

# Lista 1

**Zadanie 1.** Sprawdź, czy następujące podzbiory  $\mathbb{R}^n$  są podprzestrzeniami liniowymi:

1.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 5a + 2b = 0\}$
2.  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
3.  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
4.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
5.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 1\}$
6.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 0\}$
7.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 1\}$
8.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
9.  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$

**Zadanie 2.** Rozważmy zbiór wszystkich (nieskończonych) ciągów o elementach w  $\mathbb{R}$ . Definiujemy dodawanie takich ciągów po współrzędnych, tak samo mnożenie przez skalar, tj.:

$$(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots), \quad \alpha(a_1, a_2, \dots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots) .$$

Jest to przestrzeń liniowa, gdzie  $\vec{0}$  to ciąg złożony z samych 0. Dla podanych poniżej podzbiorów tej przestrzeni liniowej określ, które z nich są podprzestrzeniami liniowymi, a które nie. Odpowiedzi *uzasadnij*.

- (a) Zbiór ciągów  $(a_1, a_2, \dots)$  takich, że dla każdego  $n \geq 3$  mamy  $a_n = n \cdot a_{n-1} + n^2 \cdot a_{n-2}$ .
- (b) Zbiór ciągów  $(b_1, b_2, \dots)$  takich, że dla każdego  $n \geq 2$  mamy  $b_n = 3 \cdot b_{n-1} + 2^n - 1$ .
- (c) Zbiór ciągów  $(c_1, c_2, \dots)$  takich, że dla każdego  $n \geq 3$  mamy  $c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-2}$ .
- (d) Zbiór ciągów  $(d_1, d_2, \dots)$  takich, że skończenie wiele liczb spośród  $d_1, d_2, \dots$  jest dodatnia.

**Zadanie 3.** Niech  $\mathbb{V}$  — przestrzeń liniowa nad  $\mathbb{F}$  oraz  $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$  będą jej podprzestrzeniami.

Pokaż, że  $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$  oraz  $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$  są odpowiednio: największą przestrzenią liniową zawartą w  $\mathbb{W}$  i  $\mathbb{W}'$  oraz najmniejszą zawierającą  $\mathbb{W}$  i  $\mathbb{W}'$ .

Pokaż też, że dla przestrzeni liniowych  $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$  nad tym samym ciałem  $\mathbb{F}$ , iloczyn kartezjański  $\mathbb{V} \times \mathbb{V}'$  z dodawaniem i mnożeniem po współrzędnych, jest przestrzenią liniową nad  $\mathbb{F}$ .

**Zadanie 4.** Pokaż, że:  $U$  jest zbiorem liniowo zależnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim wektor  $u \in U$ , taki że

$$\text{LIN}(U) = \text{LIN}(U \setminus \{u\}).$$

Pokaż też, że jeśli  $U$  nie zawiera wektora zerowego  $\vec{0}$ , to są przynajmniej dwa takie wektory  $\vec{u}$ .

Zaneguj obustronnie tę równoważność, aby uzyskać charakteryzację zbioru liniowo zależnego.

**Zadanie 5.** Niech  $\mathbb{V}$ , przestrzeń liniowa nad ciałem  $\mathbb{F}$ ,  $U = (v_1, \dots, v_k)$  będzie układem wektorów z  $\mathbb{V}$ , zaś  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$  ciąg skalarów, takich że  $\alpha_1 \neq 0$ . Pokaż, że

$$\text{LIN} \left( \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, v_2, \dots, v_k \right\} \right) = \text{LIN} (\{v_1, v_2, \dots, v_k\}).$$

**Zadanie 6.** Przedstaw wektor  $\vec{W}$  jako kombinację podanych wektorów  $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k$  (lub uzasadnij, że to niemożliwe), nad ciałem  $\mathbb{R}$ :

1.  $\vec{W} = (1, 5), \vec{V}_1 = (1, 1), \vec{V}_2 = (2, 0)$ .
2.  $\vec{W} = (5, 10, 11), \vec{V}_1 = (1, 2, 3), \vec{V}_2 = (0, 3, 2), \vec{V}_3 = (1, 1, 1)$ .
3.  $\vec{W} = (5, 10, 11), \vec{V}_1 = (1, 2, 3), \vec{V}_2 = (0, 3, 2), \vec{V}_3 = (1, 8, 7)$ .
4.  $\vec{W} = (4, 17, 18), \vec{V}_1 = (1, 2, 3), \vec{V}_2 = (0, 3, 2), \vec{V}_3 = (3, 9, 11)$ .

**Zadanie 7.** Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{Z}_3^3$  (zbiór trzelementowych ciągów elementów z  $\mathbb{Z}_3$ , nad ciałem  $\mathbb{Z}_3$ ). Ile wektorów należy do  $\text{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 1))$ ? A ile do  $\text{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 2))$ ?

**Zadanie 8.** Pokaż następujące fakty wprost z definicji, tj. rozpisując odpowiednie kombinacje liniowe:

- Niech  $\mathbb{V}$  będzie przestrzenią liniową,  $U \subseteq \mathbb{V}$  układem wektorów. Wtedy:

$$\text{LIN}(U) = \text{LIN}(\text{LIN}(U)) .$$

- Niech  $\mathbb{V}$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{F}$ , zaś  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{V}$  wektorami z tego ciała. Jeśli skalary  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$  są niezerowe to

$$\text{LIN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \text{LIN}(\alpha_1 \vec{v}_1, \dots, \alpha_k \vec{v}_k).$$

- Dla  $i \neq j$  oraz skalara  $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\text{LIN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \text{LIN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \alpha \vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_k).$$

**Zadanie 9.** Pokaż równoważność następujących warunków (dla  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ ):

1. Zbiór  $B$  jest liniowo niezależny.
2. Wektor  $\vec{0}$  ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru  $B$ .
3. Pewien wektor z  $\text{LIN}(B)$  ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru  $B$ .
4. Każdy wektor z  $\text{LIN}(B)$  ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów z  $B$ .

Zaneguj powyższe warunki, aby uzyskać charakteryzację zbiorów liniowo zależnych.

**Zadanie 10.** Rozważamy przestrzeń nad  $\mathbb{R}$ . Niech  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości  $\alpha \in \mathbb{R}$  zbiory wektorów

- $\{\alpha \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2\}$
- $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_3 + \vec{v}_4, \dots, \vec{v}_{n-1} + \vec{v}_n, \vec{v}_n + \alpha \vec{v}_1\}$

są liniowo niezależne?

**Zadanie 11 (\* Nie liczy się do podstawy).** Niech  $M$  będzie zbiorem skończonym. Na zbiorze jego podzbiorów  $2^M$  określamy operacje:

$$U + U' := U \Delta U', \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie  $\Delta$  oznacza różnicę symetryczną, tj.  $U \Delta U' = (U \setminus U') \cup (U' \setminus U)$ . Pokaż, że tak określony zbiór jest przestrzenią liniową nad  $\mathbb{Z}_2$ .