Lista 2

Zadanie 1. Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$)? Rozszerz ich maksymalny podzbiór niezależny do bazy.

1. $(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1),(1,0,1)$;
2. $(0,1,2),(1,1,1),(1,1,1)$;
3. $(1,0,1,0),(1,2,0,1),(0,2,1,1),(0,0,1,1)$;
4. $(1,0,1,0),(0,2,0,2),(1,1,0,0),(0,0,2,1)$.

Zadanie 2. Uzasadnij, że poniższe zbiory wektorów są liniowo niezależne (w odpowiednim $\mathbb{R}^n$), rozszerz je do bazy (odpowiedniego) $\mathbb{R}^n$:

- $(2,2,7,-1),(3,-1,2,4),(1,1,3,1)$;
- $(2,3,-4,-1),(1,-2,1,3)$;
- $(2,3,5,-4,1),(1,-1,2,3,5)$.

Zadanie 3. Rozpatrzmy jeszcze raz przestrzeń liniową z Zadania 11 z Listy 1, tj. dla zbioru M na zbiorze jego podzbiorów 2^M określamy operacje (nad $\mathbb{Z}_2$):

$$U + U' := U \triangle U', \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną, tj. $U \triangle U' = (U \setminus U') \cup (U' \setminus U)$.

Niech $U_1, U_2, \ldots, U_k \subseteq M$ są takie, że dla każdego i zbiór U_i nie jest podzbiorem sumy pozostałych zbiorów, tj. $U_i \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} U_j$. Pokaż, że $U_1, U_2, \ldots, U_k$ są liniowo niezależne.

Zadanie 4. Rozpatrzmy ponownie przestrzeń liniową z Zadania 11 z Listy 1 (i zadania powyżej). Niech M będzie skończone. Podaj (naturalną) bazę tej przestrzeni liniowej. Czy potrafisz naturalnie zinterpretować izomorfizm zadany przez tę bazę?

Zadanie 5. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś B jego *nieskończoną* bazą.

Pokaż, że $\mathbb{V}$ jest izomorficzna ze zbiorem funkcji z B w $\mathbb{F}$ o skończenie wielu argumentach, dla których przyjmują niezerową wartość, tj. z przestrzenią:

$$\{f : B \to \mathbb{F} \ : \ \{b : f(b) \neq 0\} \text{ jest skończony}\} \ .$$

Zadanie 6. Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$ (będących podprzestrzeniami $\mathbb{V}$) zachodzi

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}') = 1 + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') \ .$$

Udowodnij, że suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest jedną z przestrzeni $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$, a przecięcie $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$—drugą.

Zadanie 7. Niech $\mathbb{U}, \mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$. Udowodnij zawieranie:

$$(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}') \leq \mathbb{U} \cap (\mathbb{W} + \mathbb{W}')$$

Pokaż, że jeśli $\mathbb{W} \leq \mathbb{U}$ to w zachodzi równość obu stron powyższego zawierania.

Zadanie 8. Niech $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ będzie izomorfizmem przestrzeni liniowych. Pokaż, że $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{V}$ jest liniowo niezależny/jest liniowo zależny/jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(\vec{v}_1), \ldots, \varphi(\vec{v}_k) \in \mathbb{V}'$ jest liniowo niezależny/jest liniowo zależny/jest bazą.

Zadanie 9. Wyraź w bazach $B = \{(1,2,3); (0,1,2); (0,0,1)\}$ oraz $C = \{(1,-1,2); (0,1,1); (0,-1,1)\}$ wektory

- $(1,0,0)$
- $(0,1,0)$
- $(0,0,1)$
- $(7,3,2)$
- $(-2,1,5)$
- $(3,-2,1)$.

Zadanie 10. Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ dla

1. $S = \{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$, $T = \{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}$;
2. $S = \{(2, -1, 0, -2), (3, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1)\}$, $T = \{(3, -1, -1, 0), (0, -1, 2, 3), (5, -2, -1, 0)\}$.

Zadanie 11 (* Nie liczy się do podstawy.). *Uwaga: w tym zadaniu nie można korzystać z twierdzenia o równoliczności baz ani z lematu o wymianie.*

Używając eliminacji Gaußa udowodnij następujące twierdzenie:
Jeśli $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, to zbiór liczący $k + 1$ wektorów jest liniowo zależny.

W tym celu wyraź wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k+1}$ w bazie B i przeprowadź na tej reprezentacji eliminację Gaußa.

Wywnioskuj z tego twierdzenia, że każde dwie bazy przestrzeni skończenie wymiarowej są równoliczne.