

Lista 3

Zadanie 1. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq \mathbb{V}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$;
2. istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$;
3. dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zachodzi $U = \vec{u} + \mathbb{W}$.

Udowodnij też równoważność poniższych warunków:

1. istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową;
2. istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową;
3. dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zbiór $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś U i U' jej warstwami. Pokaż, że

$$U = U' \quad \text{lub} \quad U \cap U' = \emptyset .$$

Możesz skorzystać z Zadania 1, nawet jeśli nie potrafisz go udowodnić.

Zadanie 3. Pokaż, że na zbiorze warstw (podprzestrzeni $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ nad ciałem \mathbb{F}) można zadać strukturę przestrzeni liniowej poprzez:

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \mathbb{W}) + (\vec{u}' + \mathbb{W}) &= (\vec{u} + \vec{u}') + \mathbb{W} \\ \alpha(\vec{u} + \mathbb{W}) &= (\alpha\vec{u}) + \mathbb{W} \end{aligned}$$

Ile wynosi wymiar tak zdefiniowanej przestrzeni (w zależności od $\dim \mathbb{V}$ i $\dim \mathbb{W}$)?

Wskaż opór i rozmiar baz i rozmiar baz w punkcie drugim w \mathbb{W} : \mathbb{W} : \mathbb{W}

Zadanie 4. Wyznacz bazę obrazu dla następujących przekształceń liniowych (z \mathbb{R}^3)

- $F(x, y, z) = (2x + y, 3x - z, 5x + y - z, -2x + 2y - 2z)$;
- $G(x, y, z) = (x + y, y - 2z, 3z, x - y)$;
- $H(x, y, z) = (x + y, y + z)$;

Zadanie 5. Wyznacz bazę jądra dla następujących przekształceń liniowych (z \mathbb{R}^3)

- $H(x, y, z) = (x + y, y + z)$;
- $I(x, y, z) = (x + y, 2y + z, y - z)$;
- $J(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y)$.

Wskaż odpowiedni układ równań.

Zadanie 6. Które z poniższych przekształceń są liniowe (dziedziny i przeciwdziedziny przekształceń są przestrzeniami \mathbb{R}^n dla odpowiednich n)?

- $L(x, y) = (2x - y, x + 3y - 1, 5x + 2y)$,
- $L'(x, y, z) = (3x + 5y - 2z, 2x - y)$,
- $L''(x, y, z) = (x \cdot y + z, -2x - z, -2y - z)$.

Dla tych z powyższych przekształceń, które są liniowe, znajdź ich rzędy oraz podaj bazy jądra i obrazu.

Zadanie 7. Niech \mathbb{V} będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem \mathbb{F} , zaś $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$ niezerowym (tj. istnieje $\vec{v} \in \mathbb{V}$ takie że $F(\vec{v}) \neq \vec{0}$) przekształceniem liniowym (takie przekształcenia nazywamy *funkcjonalami liniowymi*).

- Jaki jest wymiar jądra $\ker F$?
- Ustalmy dowolny wektor $\vec{w} \in \mathbb{V} \setminus \ker F$. Pokaż, że $\text{LIN}(\ker F \cup \{\vec{w}\}) = \mathbb{V}$.
- Niech F, G będą dowolnymi funkcjonalami liniowymi na \mathbb{V} o tym samym jądrze, tj. $\ker F = \ker G$. Korzystając z poprzedniego punktu pokaż, że wtedy istnieje $\beta \in \mathbb{F}$, taka że $F = \beta G$.

Zadanie 8. Niech $F : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ będzie funkcjonałem liniowym. Pokaż, że istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takie że

$$F((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i .$$

Wskazówka: Wystarczy zadać F na bazie standardowej.

Zadanie 9. Rozważmy przestrzeń wielomianów o stopniu najwyżej 7 nad ciałem \mathbb{Z}_5 oraz przekształcenie liniowe zdefiniowane jako suma pierwszej i drugiej pochodnej, tj.:

$$F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2} ,$$

gdzie $i(i-1)x^{i-2}$ dla $i < 2$ oznacza 0.

Podaj bazy jądra $\ker F$ i obrazu $\text{Im } F$ tego przekształcenia. Podaj ich wymiary.

Zadanie 10. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- F jest różnowartościowe;
- $\dim(\ker(F)) = 0$;
- $\ker(F)$ składa się z jednego wektora;
- $\dim(\text{Im}(F)) = \dim(\mathbb{V})$.

Zadanie 11 (* Nie liczy się do podstawy, choć nie jest takie trudne). Załóżmy, że dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zachodzi $L^3(\vec{v}) = \vec{0}$, dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy również $L^2(\vec{v}) = \vec{0}$, dla każdego wektora v .

Udowodnij uogólnienie tego faktu:

Jeśli dla $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz pewnego $k > n$ zachodzi $L^k(\vec{v}) = \vec{0}$ dla dowolnego wektora \vec{v} , to zachodzi również $L^n(\vec{v}) = \vec{0}$.

Wskazówka: Rozważ wektory $\vec{v}, L(\vec{v}), L^2(\vec{v}), \dots, L^{n-1}(\vec{v})$. Są one liniowo zależne.