Lista 4

Zadanie 1. Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalara α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierze identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynkę oraz zera w innych miejscach):

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} \cdot A = A \quad B \cdot \mathrm{Id} &= B \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\ \alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B &= A \cdot (\alpha B) \\ A[B|C] &= [AB|AC] \\ \left[\frac{B}{C}\right] A &= \left[\frac{BA}{CA}\right] \end{aligned}$$

Zadanie 2. Pokaż, że mnożenie macierzy jest łączne.

Wskazówka: Możesz korzystać bezpośrednio z definicji oraz z Zadania 1. Przy bardziej skomplikowanych zastanów się, czy nie korzystasz z łączności. Bardzo pomocne może być korzystanie z liniowości.

Zadanie 3. Podaj zwartą postać macierzy (nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n .$$

Postać zwarta nie zawiera sum, wielokropków itp.

Zadanie 4. Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B, takich że $AB = BA$, jest przestrzenią liniową.

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.

Wskazówka: Można na palcach, ale można też prawie bez rachunków: zauważ, że każda macierz komutuje z Id oraz M komutuje z M. Oblicz też wymiar przestrzeni tych macierzy.

Zadanie 6. Pokaż, że dla macierzy A, B odpowiednich rozmiarów zachodzi

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T \ , \\ (A^T)^T &= A \\ (A + B)^T &= A^T + B^T \ . \end{aligned}$$

Zadanie 7. Wyznacz bazę jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 8. Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach w $\mathbb{R}$) w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 9. Niech M będzie macierzą wymiaru $n \times n$ postaci:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Oblicz rząd macierzy M^k dla każdego $k \geq 1$. *Uzasadnij odpowiedź.*

Wskazówka: Zastanów się, jak wygląda $M^k \vec{E}_i$. A jeszcze lepiej: $\mathrm{LIN}(M^k \vec{E}_i)$.

Zadanie 10. Niech A, B będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru. Pokaż, że

- Jeśli AB jest odwracalna to A i B również są odwracalne.
- Jeśli A, B są odwracalne, to AB też jest odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^T jest odwracalna i zachodzi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^{-1} jest odwracalna i zachodzi $(A^{-1})^{-1} = A$.

Zadanie 11 (* Nie liczy się do podstawy). Pokaż, że każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych. Co więcej, macierze $D_{i\alpha}$ mogą być ostatnie lub pierwsze.

Pokaż też, że każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych oraz (jednej) macierzy przekątniowej (może ona mieć zera na przekątnej).

Wskazówka: Skorzystaj z faktu, że używając eliminacji Gaussa można sprowadzić macierz odwracalną do macierzy diagonalnej. Zinterpretuj te operacje jako mnożenie macierzy i odwróć kolejne operacje. Dla macierzy nieodwracalnej skorzystaj z faktu używającego jednocześnie eliminacji na kolumnach i wierszach, potem postępuj podobnie.