Lista 6

Zadanie 1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix} .$$

Oblicz AA^T i jej wyznacznik. Wywnioskuj z tego, ile wynosi $\det(A)$.

Zadanie 2. Pokaż, że układ równań uzyskany przez

- zamianę i-tego oraz j-tego równania
- dodanie do j-tego równania wielokrotności i-tego
- przemnożenie i-tego równania przez stałą $\alpha \neq 0$
- usunięcie trywialnego równania $\sum_i 0 \cdot x_i = 0$

jest równoważny wejściowemu.

Wskazówka: Można na palcach, ale prościej jest zinterpretować (wszystko poza ostanią operacją) jako wierszowe operacje elementarne, które są odwracalne.

Zadanie 3. Pokaż też, że jeśli macierz A' uzyskamy z macierzy A poprzez operacje wierszowe, to $\ker A = \ker A'$.

Niech A będzie macierzą w postaci schodkowej (wierszowo) i niech każdy element wiodący w wierszu będzie równy 1. Wykonaj operacje wierszowe, tak by te elementy wiodące były jedyne w kolumnie. Jak wygląda jądro tak uzyskanej macierzy?

Zadanie 4. Rozwiąż przy użyciu wzorów Cramera, tj. $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, układy równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 5. Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru λ? Układ jest nad $\mathbb{Z}_{13}$, tym samym $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$.

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = 1 \\ x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = \lambda \\ x + y + \lambda^3 z = \lambda^2 \end{cases} .$$

Zadanie 6. Rozważmy grę, rozgrywającą się na prostokątnej planszy $n \times 1$. Na wejściu każde pole jest zapalone lub zgaszone. W pojedynczym ruchu możemy dotknąć konkretnego pola, co powoduje zmianę (tj. z zapalonego na zgaszone i odwrotnie) na tym polu i na sąsiednich. Celem gry jest zapalenie wszystkich pól.

Dla jakich wartości n wygrana jest zawsze możliwa?

Podaj prosty algorytm, który rozwiązuje grę, jeśli jest to możliwe (istnieje algorytm zachłanny.)

Zadanie 7. Podaj jedno rozwiązanie szczególne oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Preferowana metoda eliminacji.

Zadanie 8. Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej)

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases} .$$

Zadanie 9. Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartością własną macierzy M^2, to M wa wartość własną λ lub $-\lambda$.

Wskazówka: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Zadanie 10 (* Nie liczy się do podstawy). Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Wskazówka: Pokaż tezę najpierw dla B odwracalnego. Następnie dla B, które ma na przekątnej najpierw same 1 a potem same 0. Następnie udowodnij (eliminacja Gaußa), że każda macierz M jest iloczynem macierzy elementarnych oraz macierzy ww. postaci.

Zadanie 11. Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:

- $L((x, y, z)) = (2x - y, 0, y + z)$;
- $L'((x, y, z)) = (0, 0, y)$;
- $L''(x, y, z) = (y + z, x + 2z, 0)$.

Wskazówka: Czasami może być prościej wprost, bez przechodzenia przez macierze.