Lista 7

Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ są różnymi wartościami własnymi macierzy M, to suma (mnogościowa) baz przestrzeni $\mathbb{V}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbb{V}_{\lambda_k}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

Wywnioskuj z tego, że $\mathbb{V}_{\lambda_1} \cap \mathrm{LIN}(\bigcup_{i=2}^{k} \mathbb{V}_{\lambda_i}) = \{\vec{0}\}$.

Wskazówka: Najprościej przez indukcję dodając pojedyncze wektory.

Zadanie 2. Rozważmy macierz kwadratową M oraz jej macierz transponowaną M^T. Udowodnij, że M oraz M^T mają te same wartości własne oraz że dla ustalonej wartości własnej λ

- jej krotności algebraiczne dla M oraz M^T są takie same;
- jej krotności geometryczne dla M oraz M^T są takie same.

Wskazówka: $\det(A) = \det(A^T)$, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^T)$.

Zadanie 3. Znajdź wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne dla poniższych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dla jednej z wartości oblicz odpowiadające wektory własne.

Zadanie 4 (* nie liczy się do podstawy). Dla wielomianu $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ możemy zdefiniować naturalnie wartość tego wielomianu na macierzy kwadratowej, jako $\varphi(M) = \sum_{i=0}^{k} a_i M^i$, gdzie $M^0 = \mathrm{Id}$.

Niech $M = AJA^{-1}$, gdzie J jest macierzą Jordana (tzn. na przekątnej ma klatki Jordana), zaś φ_M jej wielomianem charakterystycznym. Pokaż, że $\varphi_M(M)$ jest macierzą zerową.

(W pełnej ogólności to zadanie powinno mówić, że A, J są macierzami nad $\mathbb{C}$, ale w zasadzie nic nie zmienia to w dowodzie: wystarczy, że pokażesz to dla $\mathbb{R}$.)

Zadanie 5. Pokaż, że:

- suma macierzy symetrycznych jest macierzą symetryczną;
- iloczyn macierzy symetrycznych A, B jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BA$;
- jeśli macierz symetryczna jest odwracalna, to jej macierz odwrotna jest symetryczna.

Zadanie 6. Dla wektora $\vec{V}$ niech $\sum \vec{V}$ oznacza sumę jego współrzędnych.

Niech A będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że dla każdego $\vec{V}$ zachodzi

$$\sum(A\vec{V}) = \sum V \ . \tag{*}$$

Pokaż też twierdzenie odwrotne: macierz A, która ma wszystkie elementy nieujemne i która dla każdego $\vec{V}$ spełnia (*), jest macierzą stochastyczną.

Zadanie 7. Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy kolumnowo stochastycznych (dodatnich), jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Niech $M_1, \ldots, M_k$ będą macierzami kolumnowo stochastycznymi (dodatnimi) oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liczbami nieujemnymi, spełniającymi $\sum_i \alpha_i = 1$. Pokaż, że

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i$$

też jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Zadanie 8. Niech A będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną. Pokaż, że A nie ma wartości własnej -1.

Wskazówka: Rozpatrz A^2. Jaka jest krotność geometryczna wartości własnej 1? Możesz korzystać z Twierdzeń udowodnionych na wykładzie.

Zadanie 9. Niech A będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną, potraktujmy ją jako macierz liczb zespolonych. Pokaż analogicznie do dowodu na wykładzie, że jeśli A ma (zespoloną) wartość własną o module 1, to wektor własny tej wartości własnej jest postaci $\alpha\vec{V}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C}$ oraz $\vec{V} > 0$ (w szczególności: $\vec{V}$ jest wektorem liczb rzeczywistych).

Zadanie 10. Dla wektora $\vec{V} = [v_1, \ldots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ niech $\|\vec{V}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$.

Niech A będzie macierzą stochastyczną. Pokaż, że dla wektora $\vec{V} \in \mathbb{R}^n$

$$\|A\vec{V}\|_1 \leq \|\vec{V}\|_1 \ .$$

Wywnioskuj z tego, że A nie ma wartości własnej o wartości bezwzględnej większej niż 1.

To zadanie zachodzi też dla liczb zespolonych, dowód jest taki sam.

Zadanie 11. Rozważmy graf o wierzchołkach $\{1, 2, 3, 4\}$ i krawędziach skierowanych $1 \to 2$, $1 \to 3$, $1 \to 4$, $2 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 1$, $4 \to 3$. Jak wygląda znormalizowana macierz sąsiedztwa tego grafu? Oblicz PageRank tego grafu dla $m = 0,25$.