

Algebra 2021/22 — Egzamin połówkowy

Czas: 150 minut.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać **zwięzły** opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; zadanie nie spełniające tego warunku mogą nie być sprawdzane. W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Zadanie 1.

[2 punkty] Podaj definicję macierzy podobnych.

[2 punkty] Niech $A \sim B$ będą macierzami podobnymi. Co umiesz powiedzieć o wyznacznikach $\det(A), \det(B)$?

Co umiesz powiedzieć o wartościach własnych A oraz B oraz ich krotnościach?

[6 punktów] Śladem macierzy kwadratowej nazywamy sumę elementów na jej przekątnej, tj.

$$\operatorname{tr} \left((a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \right) = \sum_{i=1}^n a_{ii} .$$

Pokaż, że:

- $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T)$;
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;
- dla macierzy podobnych $A \sim B$ zachodzi $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Zadanie 2.

[2 punkty] Podaj definicje obrazu i jądra przekształcenia liniowego.

[2 punkty] Co umiesz powiedzieć o wymiarach jądra i obrazu przekształcenia liniowego (jaką zależność spełniają)?

[6 punktów] Dla poniższej macierzy M podaj bazy: jądra i obrazu przekształcenia liniowego L_M , zadanego jako $L_M(\vec{V}) = M\vec{V}$.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 3.

[2 punkty] Podaj wzory Cramera, kiedy można ich użyć?

[2 punkty] Jak można scharakteryzować (w terminach przestrzeni liniowych) zbiór wszystkich rozwiązań układu równań:

$$A\vec{X} = \vec{B}$$

[6 punktów] Podaj liczbę rozwiązań układu równań nad \mathbb{Z}_{31} w zależności od wartości parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_{31}$.

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = -1 \\ \lambda x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ (1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + z = 1 \end{cases} .$$

Zadanie 4.

[2 punkty] Podaj definicję macierzy odwracalnej.

[2 punkty] Podaj jawny wzór na macierz odwrotną używając wyznaczników minorów.

[6 punktów] Podaj macierz odwrotną do macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 5.

[2 punkty] Podaj definicje wielomianu charakterystycznego macierzy oraz wielomianu charakterystycznego przekształcenia liniowego.

[2 punkty] Co umiesz powiedzieć o wartościach własnych macierzy symetrycznej liczb rzeczywistych?

[6 punktów] Macierz jest *antysymetryczna*, jeśli $A^T = -A$. Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy antisymetrycznej A , to $-\lambda$ też jest wartością własną A .