# Lista 9

**Zadanie 1.** Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie-wymiarową przestrzenią Euklidesową (unitarną). Udowodnij, że dla zbioru wektorów $U \subseteq V$ zachodzi

$$U^{\perp} = (\mathrm{LIN}(U))^{\perp} \quad \text{oraz} \quad (U^{\perp})^{\perp} = \mathrm{LIN}(U) \ .$$

**Zadanie 2** (Macierz Grama)**.** Zdefiniujmy macierz Grama układu wektorów $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ w przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{V}$ wymiaru $k$ jako

$$G(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}) = (\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,k} \ .$$

Niech $B = \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{V}$. Zdefiniujmy macierz $A = [(\vec{v}_1)_B \,|\, (\vec{v}_2)_B \,|\, \ldots \,|\, (\vec{v}_k)_B]$, tj. macierz, której $j$-ta kolumna to wektor z $\mathbb{R}^n$ będący wyrażeniem $\vec{v}_j$ w bazie $B$. Pokaż, że

$$G(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}) = A^T A \ .$$

Korzystając z tej reprezentacji udowodnij, że

- $\det(G(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}))$ jest nieujemny
- $\det(G(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\})) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ jest liniowo zależny.

*Komentarz:* Założenie, że wymiar przestrzeni i liczba wektorów w układzie są takie sama nie jest potrzebne, ale ułatwia rachunki.

**Zadanie 3** (Nierówność Bessela; równość Parsevala)**.** Niech $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ będą układem ortonormalnym (nie zakładamy, że jest bazą). Pokaż, że dla dowolnego wektora $\vec{v}$:

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle|^2 \leq ||\vec{v}||^2 \ .$$

Co więcej, $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\vec{v}$ zachodzi równość.

**Zadanie 4.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na tej przestrzeni. Niech $B = \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{V}$ a $P : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ rzutem prostopadłym na podprzestrzeń jednowymiarową $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$.

Pokaż, że suma kwadratów długości rzutów prostopadłych wektorów z $B$ na $\mathbb{W}$ wynosi 1, tj.:

$$\sum_{i=1}^{n} \|P\vec{b}_i\|^2 = 1 \ .$$

*Wskazówka:* Wyraź rzut przez bazę ortonormalną $\mathbb{W}$.

**Zadanie 5.** Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów jako

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\mathrm{d}x \ .$$

Dokonaj ortonormalizacji (dowolnej) bazy przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 2.

Zrzutuj prostopadle na tą przestrzeń wielomiany $x^3$ oraz $x^3 - x^2 + x - 1$.

*Wskazówka:* Do drugiej części: to jest *rzut*. Co więcej, rzut jest przekształceniem liniowym.

**Zadanie 6.** Uzupełnij do bazy a następnie zortonormalizuj podane układy wektorów:

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

**Zadanie 7.** Pokaż, że „rzut prostopadły nie zwiększa długości": niech $P$ będzie rzutem prostopadłym na $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Wtedy dla każdego $\vec{v} \in \mathbb{V}$ zachodzi

$$\|\vec{v}\| \geq \|P\vec{v}\|$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{v} \in \mathbb{W}$.

**Zadanie 8.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową, zaś $A$ jej bazą. Pokaż, że jeśli baza $B$ powstaje z bazy $A$ przez ortonormalizację Grama-Schmidta, to $M_{BA}$ i $M_{AB}$ są macierzami górnotrójkątnymi.

**Zadanie 9.** Pokaż, że następujące przekształcenia są izometriami.

- obrót o kąt $\alpha$ na płaszczyźnie;
- zamiana jednej ze współrzędnych (w bazie ortonormalnej) na przeciwną.
- symetria względem podprzestrzeni
  *Przypomnienie:* symetria względem $\mathbb{W}$ wyraża się jako $2P_{\mathbb{W}} - \mathrm{Id}$, gdzie $P_{\mathbb{W}}$ to rzut na $\mathbb{W}$.

**Zadanie 10.** Pokaż, że macierze ortogonalne są zamknięte na mnożenie, transpozycję i branie macierzy odwrotnej. Tj. jeśli $A, B$ są ortogonalne (i tego samego rozmiaru), to również $AB, A^T, A^{-1}$ są ortogonalne.

Pokaż też, że jeśli $A$ jest ortogonalna, to

$$\det(A) \in \{-1, 1\} \ .$$

**Zadanie 11** (Nierówność Hadamarda; * nie liczy się do podstawy)**.** Niech $M = [\vec{C}_1|\cdots|\vec{C}_n]$ będzie macierzą kwadratową o kolumnach $\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n$. Pokaż, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|\vec{C}_i\|$$

(gdzie $\|\cdot\|$ to długość w standardowym iloczynie skalarnym) i że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n$ są układem ortogonalnym.

*Wskazówka:* Rozważ najpierw przypadek, gdy $\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n$ są układem ortogonalnym. W ogólności przeprowadź ortonormalizację. Co się dzieje ze stronami nierówności? W dowodzie możesz korzystać z innych zadań z tej listy, nawet jeśli nie umiesz ich pokazać.