Lista 10

Zadanie 1. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są dodatnio określone:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 2 (Algorytm Cholesky'ego)**.** Wiemy, że macierz dodatnio określoną $M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots n}$ można przedstawić jako iloczyn $A^T A$, gdzie $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ jest macierzą górnotrójkątną.

Podaj algorytm obliczania A korzystający z tego rozkładu. Jaki jest jego czas działania?

Wskazówka: Obliczaj A kolejnymi kolumnami, od lewej do prawej i z góry na dół.

Zadanie 3. Przedstaw poniższe macierze dodatnio określone w postaci $B^T B$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} .$$

Wskazówka: Dla przypomnienia: jako macierz B możesz wziąć macierz M_{EA}, gdzie E to baza standardowa, zaś A: baza ortonormalna. Można też użyć bezpośrednio Algorytmu Cholesky'ego lub po prostu policzyć ręcznie korzystając z tego, że B można wziąć górnotrójkątną.

Zadanie 4 (Nie liczy się do podstawy *)**.** Pokaż, że symetryczna macierz $n \times n$ liczb rzeczywistych jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy ma same dodatnie wartości własne.

Wskazówka: Wiemy, że dla macierzy symetrycznej suma krotności geometrycznych jej wartości własnych to n. Rozpatrz macierz Grama dla bazy ortogonalnej.

Zadanie 5. Na podstawie poniższych tabel działań określ, który zbiór z działaniem jest grupą.

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & a & c \\ c & c & a & b \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & b & c & a \\ b & a & b & c \\ c & c & a & b \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} \cdot & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & b & a & c \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} \cdot & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & d & a & c \\ c & c & a & d & b \\ d & d & b & a & c \end{array} .$$

Zadanie 6. Podaj tabelkę działań grupy obrotów i symetrii kwadratu.

Zadanie 7. Rozważamy trzy grupy:

1. grupą symetrii trójkąta równobocznego (trzy obroty i trzy symetrie osiowe);
2. grupą obrotów sześciokąta foremnego;
3. grupą $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (czyli z dodawaniem $\bmod 6$).

Przedstaw ich tabelki działań. Które z tych grup są izomorficzne?

Zadanie 8. Które z zbiorów z działaniem są grupami?

1. zbiór liczb naturalnych, z dodawaniem;
2. zbiór liczb całkowitych, z mnożeniem;
3. zbiór liczb postaci $\frac{1}{k}$, gdzie $k \geq 0$ jest całkowite, z mnożeniem;
4. zbiór liczb wymiernych, z dodawaniem;
5. zbiór liczb wymiernych bez zera, z mnożeniem.

Zadanie 9. Pokaż, że dla $x_1, \ldots, x_k$: elementów grupy G oraz liczb całkowitych $z_1, \ldots, z_k$ zachodzi:

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \cdots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k} (x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}} \cdots (x_1^{-1})^{z_1} = (x_k)^{-z_k} (x_{k-1})^{-z_{k-1}} \cdots (x_1)^{-z_1} .$$

Zadanie 10. Wyznacz wszystkie izomorfizmy pomiędzy grupą obrotów kwadratu, a grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

Wskazówka: Pokaż, że izomorfizm zachowuje rząd elementu.

Zadanie 11. Pokaż, że, z dokładnością do izomorfizmu, istnieje tylko jedna grupa trzyelementowa (dokładniej: $(\mathbb{Z}_3, +)$) oraz dwie grupy czteroelementowe: $(\mathbb{Z}_4, +)$ oraz $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ z dodawaniem po współrzędnych.

Wskazówka: W drugim punkcie: jakie są możliwe rzędy elementów?