Algebra 2021/22 — Egzamin końcowy

Czas: 150 minut.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać **zwięzły** opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; *zadanie nie spełniające tego warunku mogą nie być sprawdzane.* W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Osoby zaliczające **różnice programowe** rozwiązują zadania 2–5, czas: 120 minut

Zadanie 1.
[2 punkty] Podaj definicję *standardowego* iloczynu skalarnego.
Podaj warunki, które musi spełniać funkcja, aby była (*ogólnym*) iloczynem skalarnym (nad $\mathbb{R}$).
[2 punkty] Dana jest baza ortonormalna $B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ przestrzeni $\mathbb{V}$ (dla pewnego ustalonego iloczynu skalarnego) oraz wektory $\vec{v}, \vec{v}' \in \mathbb{V}$. Jak wyglądają współczynniki wyrażania $\vec{v}$ w bazie B, tj. $(\vec{v})_B$? Jak wyraża się iloczyn skalarny $\vec{v}$ i $\vec{v}'$ poprzez $(\vec{v})_B$ i $(\vec{v}')_B$?
[6 punktów] Dokonaj ortonormalizacji poniższego układu wektorów i uzupełnij go do bazy ortonormalnej przestrzeni $\mathbb{R}^4$ (dla standardowego iloczynu skalarnego). Staraj się nie zmieniać kolejności wektorów. Dla potrzeb rachunków może być prościej reprezentować wektory w postaci $\alpha\vec{v}$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą, zaś $\vec{v}$ ma „ładne" współrzędne (np. całkowite).

$$(1, 1, 1, 1)^T, (2, 4, 2, 4)^T, (3, 1, 5, 1)^T \quad .$$

Zadanie 2.
[2 punkty] Co to jest rząd elementu grupy? Dla grupy permutacji, co to jest parzystość permutacji?
[2 punkty] Co mówi tw. Cayley'a o reprezentowaniu grup skończonych?
[6 punktów] Rozpatrzmy permutację

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 7 & 5 & 6 & 11 & 9 & 12 & 1 & 17 & 14 & 13 & 4 & 10 & 16 & 18 & 8 & 3 & 15 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

oraz permutację $\tau = \sigma^{71}$. Rozłóż permutację τ na cykle, podaj jej rząd, czy τ jest permutacją parzystą? Podaj permutację odwrotną τ^{-1}, jej rząd i rozkład na cykle τ^{-1}; czy τ^{-1} jest permutacją parzystą?

Zadanie 3.
[2 punkty] Jak zdefiniowane jest $\mathbb{Z}_n^*$? Ile ma elementów?
[2 punkty] Podaj Chińskie twierdzenie o resztach.
[6 punktów] Pokaż, że dla liczb naturalnych m, n, r, k jeśli $k|m, k|n, k|r$ to

$$n \bmod m = r \iff \frac{n}{k} \bmod \frac{m}{k} = \frac{r}{k} \quad .$$

Wywnioskuj z tego uogólnienie (wariantu) Chińskiego twierdzenia o resztach: dla dwóch liczb (niekoniecznie względnie pierwszych) m_1, m_2 i reszt z dzielenia r_1, r_2 (odpowiednio przez m_1, m_2) istnieje liczba n spełniająca

$$n \bmod m_1 = r_1$$
$$n \bmod m_2 = r_2$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{nwd}(m_1, m_2) \,|\, (r_1 - r_2) \quad .$$

Zadanie 4.
[2 punkty] Dla działania grupy na zbiorze, podaj definicję orbity i stabilizatora.
[2 punkty] Co umiesz powiedzieć o różnych orbitach? Jaką zależność spełniają orbita i stabilizator ustalonego elementu?
[6 punktów] Niech D_{10} oznacza grupę obrotów i symetrii dziesięciokąta foremnego, zaś $\mathbb{Z}_2$: zbiór $\{0, 1\}$ z dodawaniem modulo 2.

Rozpatrzmy zbiór dziesięciokątów foremnych, których każdy wierzchołek jest pomalowany na biało lub czarno i działanie grupy $\mathbb{Z}_2 \times D_{10}$ na tym zbiorze:

- $(0, g)$ wykonuje obrót/symetrię g w naturalny sposób;
- $(1, e)$ zamienia kolory, tj. każdy wierzchołek biały staje się czarny a każdy czarny: biały;
- $(1, g)$ wykonuje $(0, g)$ i $(1, e)$ w dowolnej kolejności (nie musisz pokazywać, że kolejność nie ma znaczenia).

Ile orbit ma to działanie? Nie musisz pokazywać, że działanie jest dobrze zdefiniowane.

verte →

Zadanie 5.
[2 punkty] Co to znaczy, że rozszerzenie $\mathbb{F}\langle a\rangle$ ciała $\mathbb{F}$ jest algebraiczne a co, że przestępne?
[2 punkty] Dla dwóch ciał skończonych $\mathbb{F} \leq \mathbb{F}'$, co umiesz powiedzieć o przekształceniu

$$\varphi : \mathbb{F}' \to \mathbb{F}', \quad \varphi(a) = a^{|\mathbb{F}|}.$$

[6 punktów] Rozważmy niezerowy element a z ciała $\mathbb{F}$ oraz sumy

$$a, a + a, a + a + a, \ldots$$

Pokaż, że

- żadna z powyższych sum nie jest równa 0 (w ciele $\mathbb{F}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{F}$ ma charakterystykę $+\infty$;
- jeśli m jest najmniejszą liczbą taką, że $\underbrace{a + a + \cdots + a}_{m \text{ razy}} = 0$ (w ciele $\mathbb{F}$), to m jest charakterystyką ciała.