Teoria informacji i kodowania: Lista 1

Zadanie 1. Udowodnij nierówność Jensena: jeśli f jest wypukłe, a X jest zmienną losową o skończonym zbiorze wartości, to
$$\mathbb{E}[f(x)] \geq f(\mathbb{E}[X]) \ .$$

Pokaż, że jeśli f jest ściśle wypukłe, to równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X jest funkcją stałą.

Zadanie 2. Udowodnij nierówność sum logarytmicznych: dla $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$

$$\sum a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq \sum a_i \log \frac{\sum_j a_j}{\sum_j b_j}$$

Pokaż, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a_i}{b_i}$ ma tę samą wartość dla wszystkich i.

Zadanie 3. Udowodnij nierówność Gibbsa:

Niech $p_1, \ldots, p_n$ będzie rozkładem prawdopodobieństwa i $q_1, \ldots, q_n > 0$ spełnia $\sum_i q_i \leq 1$. Wtedy

$$-\sum_i p_i \log p_i \leq -\sum_i p_i \log q_i.$$

Zadanie 4. Udowodnij ogólne własności entropii (możesz wykorzystać wszystkie nierówności podane powyżej, nawet jeśli nie potrafisz ich udowodnić):

$$\begin{aligned}
&& 0 \leq H[X] &\leq \log|U| \qquad \text{gdzie } X : \Omega \to U \\
&& 0 \leq H[X|Y] &\leq H[X] \\
X, Y \text{ są niezależne} &\implies & H[Y|X] &= H[Y] \\
X, Y \text{ są niezależne} &\implies & H[Y,X] &= H[X] + H[Y] \\
&& H[X|Y] \leq H[X,Y] &\leq H[X] + H[Y] \\
&& 0 \leq I(X;Y) &\leq \min(H[X], H[Y]) \\
&& I(X;Y) &= H[X] + H[Y] - H[X,Y]
\end{aligned}$$

Zadanie 5. Pokaż, że dla dowolnych zmiennych losowych X, Y mamy:

$$H[Y|X] = 0 \iff Y = f(X)$$

Wykorzystaj to do stwierdzenia, że dla dowolnej funkcji f mamy.

$$H[f(X)] \leq H[X] \ .$$

Zadanie 6. Udowodnij ogólną regułę łańcuchową: dla zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$:

$$H[X_1, \ldots, X_n] = \sum_{i=1}^{n} H[X_i | X_1, \ldots, X_{i-1}] \ .$$

Zadanie 7. Załóżmy, że mamy n kul, z których jedna jest fałszywa i ma inną wagę. W jednym porównaniu możemy porównać dwa zbiory kulek, a odpowiedź brzmi „równe"/„nierówne".

Użyj entropii i entropii warunkowej, aby podać ograniczenie dolne na liczbę porównań. Rozważmy zmienną B, która zwraca numer fałszywej kulki oraz zmienne losowe, które reprezentują kolejne porównania. Uwaga, drugie porównanie może zależeć od pierwszego, więc nie powinieneś bezpośrednio używać jego entropii. Jednakże, gdy pierwsze porównanie jest znane, drugie ma tylko dwa możliwe wyniki. Możesz użyć Zadania 6 nawet jeśli nie możesz go pokazać.

Podobne podejście zastosuj w przypadku, gdy istnieją trzy możliwe odpowiedzi (lżejsza, równa, cięższa) i chcemy również wiedzieć, czy fałszywa kulka jest lżejsza czy cięższa.

Zadanie 8 (Właściwość grupowania)**.** Niech $p_1, \dots, p_n$ będzie rozkładem prawdopodobieństwa. Zdefiniujmy $h(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$, czyli tak jak entropię dla zmiennej losowej, ale dla rozkładu prawdopodobieństwa.

Wykaż, że:

$$h(p_1, \dots, p_n) = h(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_n) + (p_1 + p_2) h\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)$$

Zadanie 9 (Entropia sumy)**.** Niech X, Y będą zmiennymi losowymi (o skończonym zbiorze wartości) i $Z = X + Y$. Wykazać, że $H[Z|X] = H[Y|X]$ oraz że gdy X, Y są niezależne, to $H(Y) \leq H[Z]$ i $H[X] \leq H[Z]$. Określ warunki, dla których zachodzi $H[Z] = H[X] + H[Y]$.