Teoria informacji i kodowania: Lista 2

Zadanie 1 (Informacja wzajemna trzech zmiennych). Za pomocą diagramu Venna można zdefiniować „informację wzajemną" trzech zmiennych jako:

$$I(X;Y;Z) = I(X;Y) - I(X;Y|Z).$$

Pokaż, że

$$I(X;Y;Z) = H(X,Y,Z) - H(X,Y) - H(Y,Z) - H(Z,X) + H(X) + H(Y) + H(Z)$$

i wywnioskuj z tego, że $I(X;Y;Z)$ jest symetryczna względem X, Y, Z. Podaj przykład zmiennych losowych, dla których $I(X;Y;Z) < 0$.

Zadanie 2. Pokaż, że

$$I(X;Y|Z) = H[X|Z] - H[X|Y,Z] = H[Y|Z] - H[Y|X,Z] \geq 0 \ .$$

Zadanie 3. Udowodnij, że

$$I(X;Z|Y) \geq I(Z;Y|X) - I(Z;Y) + I(X;Z)$$

Zadanie 4. Niech $X, Y \in \{0, 1\}$, wylosowane niezależnie i jednorodnie oraz $Z = X + Y$ (zwykłe dodawanie, nie modulo 2). Oblicz $I(X,Y)$ i $I(X,Y|Z)$.

Zadanie 5. Pokaż, że $X \to Y \to Z$ jest łańcuchem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy $Z \to Y \to X$ jest łańcuchem Markowa.

Zadanie 6. Udowodnij, że $g(Y)$ jest wystarczającą statystyką Y dla X wtedy i tylko wtedy, gdy $X \to g(Y) \to Y$.

Zadanie 7 (Lemat Shearera). Niech $X = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie zmienną losową i niech $\mathcal{A} = \{A_i\}_{1 \leq i \leq m}$ będzie kolekcją m podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ i każda liczba z $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje co najmniej w k zbiorach z $\mathcal{A}$, tj. dla każdego i

$$|\{j \ : \ i \in A_j\}| \geq k$$

Niech $X_A = \{X_j \ : \ j \in A\}$. Wtedy:

$$\sum_{1 \leq i \leq m} H(X_{A_i}) \geq kH(X)$$

Zadanie 8 (Nierówność Loomisa-Whitneya). (Poniżej zakładamy, że wszystkie poniższe zbiory mają dobrze określoną „objętość" odpowiedniego wymiaru). Niech $B \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz dla $1 \leq i \leq \ n$ niech B_i: rzut prostopadły B wzdłuż i-tej współrzędnej, tj.

$$\{(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \ : \ \exists x_i \ (x_1, \ldots, x_n) \in B\}$$

Za pomocą Lematu Shearera pokaż, że:

$$|B| \leq \sqrt[d-1]{\prod_{i=1}^{n} |B_i|} \ .$$