Teoria informacji i kodowania: Lista 4

Zadanie 1. Niech X — zmienna losowa, zaś $X_1, \ldots, X_n, \ldots$: i.i.d. $\sim X$. Znajdź granicę $\sqrt[n]{p(X_1, \ldots, X_n)}$. Granicę w jakimś sensie, ale w jakimś mocniejszym niż zbieganie wartości oczekiwanej.

Zadanie 2 (Monotoniczność entropii)**.** Niech $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=1}^{+\infty}$ będzie procesem stacjonarnym. Pokaż, że

$$\frac{H(X_1, \ldots, X_n)}{n} \leq \frac{H(X_1, \ldots, X_{n-1})}{n-1}$$
$$\frac{H(X_1, \ldots, X_n)}{n} \geq H(X_n | X_{n-1}, \ldots, X_1).$$

Zadanie 3. Niech $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ będzie procesem stacjonarnym. Pokaż, że:

$$H(X_0 | X_{-1}, \ldots, X_{-n}) = H(X_0 | X_1, \ldots, X_n) \ .$$

Intuicja: przeszłość zawiera tyle samo informacji o teraźniejszości co przyszłość.

Zadanie 4. Niech $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ będzie procesem stacjonarnym (niekoniecznie łańcuch Markowa). Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe: Udowodnij lub podaj kontrprzykład:

- $H(X_n | X_0) = H(X_{-n} | X_0)$.
- $H(X_n | X_0) \geq H(X_{n-1} | X_0)$.
- $H(X_n | X_1, \ldots, X_{n-1}, X_{n+1})$ jest nierosnące z n.
- $H(X_n | X_1, \ldots, X_{n-1}, X_{n+1}, \ldots, X_{2n})$ jest nierosnące z n.

Zadanie 5 (Tasowanie zwiększa entropię)**.** Niech T będzie zmienną losową oznaczającą tasowanie kart (czyli permutację) o dowolnym rozkładzie, zaś X zmienną losową rozkładu kart; zakładamy, że T, X są niezależne. Uzasadnij następujący ciąg równości i nierówności.

$$\begin{aligned} H(TX) &\geq H(TX|T) \\ &= H(T^{-1}TX|T) \\ &= H(X|T) \\ &= H(X) \end{aligned}$$

Zadanie 6 (Macierze podwójnie stochastyczne *)**.** Macierz kwadratowa $P = (P_{i,j})$ wymiaru $n \times n$ jest podwójnie stochastyczna, jeżeli $P_{i,j} \geq 0$ oraz dla każdego i zachodzi $\sum_i P_{i,j} = 1$ i dla każdego j zachodzi $\sum_j P_{i,j} = 1$, tj. suma w każdym wierszu i kolumnie wynosi 1. dla każdych i, j. Macierze jsest macierzą permutacji, jeśli jest podwójnie stochastyczna i ma tylko elementy $0-1$.

Pokaż, że każda macierz podwójnie stochastyczna jest kombinacją wypukłą macierzy permutacji, tj. jest postaci

$$\sum_{\alpha_k} S_k$$

gdzie $\alpha_k \in [0, 1]$, $\sum_k \alpha_k = 1$ i macierze S_k są macierzami permutacji.

Zadanie 7. Niech P będzie macierzą podwójnie stochastyczną. a $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T$ będzie rozkładem prawdopodobieństwa. Pokaż, że

$$P\vec{p}$$

też jest rozkładem prawdopodobieństwa oraz że

$$h(P\vec{p}) \geq h(\vec{p})$$

Tutaj $h((x_1, \ldots, x_n)^T) := h(x_1, \ldots, x_n)$.

Pokaż, że rozkład jednostajny jest rozkładem stacjonarnym dla podwójnie stochastycznej macierzy P.

Udowodnij, że jeśli rozkład jednostajny jest rozkładem stacjonarnym dla macierzy przejścia P (czyli $P_{i,j}$ to prawdopodobieństwo przejścia z j do i), to P jest podwójnie stochastyczna.

Zadanie 8. Niech $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Pokaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = a \ .$$

Zadanie 9. Pokaż, że jeśli $\mathcal{X} = X_1, \ldots, X_n, \ldots$ jest łańcuch Markowa, to

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_{i_1} = x_{i_1}, X_{i_2} = x_{i_2}, \ldots, X_{i_k} = x_{i_k} | X_n = x_n, X_{j_1} = x_{j_1}, \ldots, X_{j_\ell} = x_{i_\ell}] = \\ = \mathbb{P}[X_{i_1} = x_{i_1}, X_{i_2} = x_{i_2}, \ldots, X_{i_k} = x_{i_k} | X_n = x_n]\end{aligned}$$

dla dowolnych indeksów $i_1, \ldots, i_k > n > j_1, \ldots, j_\ell$.

Zadanie 10. Niech $X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4$ będą łańcuchem Markowa. Pokaż, że

$$I(X_1; X_3) + I(X_2; X_4) \leq I(X_1; X_4) + I(X_2; X_3).$$