Teoria informacji i kodowania: Lista 5

Zadanie 1. Policz entropię ruchów błądzenia losowego poszczególnych figur (nie pionków) szachowych. Dokładniej w procesie $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ zmienne $X_1, \dots, X_n, \dots$, reprezentują położenie figury. W każdym momencie czasu wybieramy kolejne pole jednostajnie wśród możliwych ruchów (nie stoimy w miejscu).

Załóż, że łańcuch Markowa jest stacjonarny (czyli rozkład początkowy jest równy rozkładowi stacjonarnemu).

Jeśli pojawią się problemy, to nie licz dla skoczka (jego graf ruchów jest dwudzielny).

Zadanie 2. Niech $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ będzie stacjonarnym łańcuchem Markowa, zaś $\mathcal{Y} = \{Y_i\}_{i=0}^{\infty}$ będzie zadany jako

$$Y_i \ f(X_i)$$

dla pewnej funkcji f (ustalonej dla całego $\mathcal{Y}$).

Pokaż, że

$$H(Y_n|Y_{n-1}, \dots, Y_k, X_k) = H(Y_n|Y_{n-1}, \dots, Y_k, X_k, \dots, X_1) \ .$$

Zadanie 3. Na wykładzie pokazaliśmy, że jeśli $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ jest stacjonarnym łańcuchem Markowa, zaś $\mathcal{Y} = \{Y_i\}_{i=0}^{\infty}$ jest zadany jako $Y_i = f(X_i)$ to

$$H[Y_n|Y_{n-1}, \dots, Y_1] \text{ jest ciągiem malejącym}$$
$$H[Y_n|Y_{n-1}, \dots, Y_1, X_1] \text{ jest ciągiem rosnącym}$$
$$H[Y_n|Y_{n-1}, \dots, Y_1] - H[Y_n|Y_{n-1}, \dots, Y_1, X_1] \to 0$$

Pokaż analogiczne fakty, jeśli założymy jedynie, że Y_i jest warunkowo (przy X_i) niezależne od $X_{i-1}, \dots, X_1$, tj. dla każdego i i każdych $y_i, x_i, \dots, x_1$ zachodzi

$$\mathbb{P}[Y_i = y_i|X_i = x_i, X_{i-1} = x_{i-1}, \dots, X_1 = x_1] = \mathbb{P}[Y_i = y_i|X_i = x_i]$$

(lub innymi słowy: $X_1, \dots, X_n, Y_n$ jest łańcuchem Markowa).

Nie musisz pokazywać odpowiednika Zadania 2, możesz założyć, że został pokazany.

Zadanie 4. Rozważmy stacjonarny proces stochastyczny $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ oraz $\mathcal{Y} = \{Y_i\}_{i=0}^{\infty}$ zdefiniowany jako $Y_i = f(X_i)$ dla pewnej funkcji f. Pokaż, że

$$H[\mathcal{Y}] \leq H[\mathcal{X}] \ .$$

Niech $\mathcal{Z} = \{Z_i\}_{i=0}^{\infty}$ będzie zdefiniowany jako

$$Z_i = g(X_i, X_{i+1})$$

dla pewnej funkcji g.

Co umiesz powiedzieć o związku między $H[\mathcal{Z}]$ i $H[\mathcal{X}]$?

Zadanie 5. Pokaż, że

$$I(X;Y) = D(p(x,y)||p(x)p(y)) \ .$$

Zadanie 6. Pokaż, że warunkowa Dywergencja Kullbacka-Leiblera jest nieujemna. Kiedy wynosi 0?

Zadanie 7. Niech $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=0}^{+\infty}$ będzie stacjonarnym łańcuchem Markowa. Pokaż, że:

$$H(X_n|X_0) \geq H(X_{n-1}|X_0).$$

Intuicja: jeśli $\mathcal{X}$ jest stacjonarny, to $H[X_n]$ jest stałe, ale zależność od X_0 spada.

Można bezpośrednio, ale można też z nierówności przetwarzania danych dla $X_1 \to X_{n-1} \to X_n$.

Zadanie 8. Niech $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=0}^{+\infty}$ będzie łańcuchem Markowa. Pokaż, że:

$$H(X_0|X_n) \geq H(X_0|X_{n-1}).$$

Zadanie 9. Niech $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w zbiorze $U = \{1, 2, \ldots, m\}$. Niech

$$N = \min_{i>0}\{X_i = X_0\} \ ,$$

czyli N to indeks pierwszej zmiennej, która jest równa X_0. Pokaż, że:

$$\mathbb{E}[N] = m$$
$$\forall_i \, \mathbb{E}[\log N] \leq H[X_i]$$

Zadanie 10. Niech niech $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ będzie stacjonarnym procesem Markowa. Pokaż, że $H[X_n|X_0]$ jest wklęsłą funkcją n. Dokładniej, pokaż że:

$$H(X_n|X_0) - H(X_{n-1}|X_0) - (H(X_{n-1}|X_0) - H(X_{n-2}|X_0)) = -I(X_1; X_n - 1|X_0, X_n) \leq 0.$$

i wywnioskuj z tego wklęsłość.