Teoria informacji i kodowania: Lista 6

Zadanie 1. Uzasadnij definicję stopy podwojenia: załóżmy, że mamy ciąg niezależnych wyścigów $X_1, \ldots, X_n$, wszystkich o takich samych prawdopodobieństwach i stawkach. Niech $S(X) = b(X)o(X)$ będzie wartością majątku po danej grze, a

$$W(b,p) = \mathbb{E}_p[\log S(X)]$$

będzie stopą podwojenia.

Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \log(S(X_i))}{n} \to W(b,p)$$

Czy wnika z tego, że z prawdopodobieństwem 1

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} S(X_i)}{2^{nW(b,p)}} \to 1 \ ?$$

Zinterpretuj $\prod_{i=1}^{n} S(X_i)$.

Jeśli nie wiesz, co to znaczy „z prawdopodobieństwem 1”, to pokaż zbieżność wg. prawdopodobieństwa.

Zadanie 2. Rozważmy inną możliwą strategię zakładów: chcemy zmaksymalizować

$$\mathbb{E}[bo] \ .$$

Znajdź strategię maksymalizującą tę funkcję.

Jaka jest oczekiwana wartość majątku po n grach (w każdej kolejnej grze stawiamy wszystko).

Zadanie 3 (*). Załóżmy, że

$$\sum_i \frac{1}{o_i} > 1$$

czyli stawki są niesprawiedliwe i niekorzystne.

Opisz optymalną strategię, jeśli możemy sobie zostawić część kapitału. To może wymagać Twierdzenia KKT, podobno jest też prosta interpretacja.

Zadanie 4. Załóżmy, że mamy ciąg wyścigów $X_1, \ldots, X_n$, stawki są równe i wynoszą m (jest m koni). Dany jest łączny rozkład prawdopodobieństwa $p(X_1, \ldots, X_n)$.

Rozważmy dwa możliwe typy obstawiania: online i offline. W obstawianiu on-line możemy obstawiać kolejny wyścig przy znanych wynikach poprzednich wyścigów.

Przy obstawianiu offline obstawiamy cały ciąg $(x_1, \ldots, x_n)$, ale jeśli trafimy, to dostajemy m^n.

Pokaż, że wartości stóp podwojenia (dla całego procesu obstawiania n wyścigów) są takie same dla tych dwóch wariantów obstawiania.

Zadanie 5. Patrzymy na problem z innej strony: Mamy ustalone stawki $o_1, \ldots, o_m$. Chcemy znaleźć $p_1, \ldots, p_m$ takie że

- stopa podwojenia $W(b,p)$ jest maksymalna;
- stopa podwojenia $W(b,p)$ jest minimalna.

Zadanie 6. Dane są prawdopodobieństwa wygranych $p_1, \ldots, p_m$. Rozważmy dwa różne zestawy stawek: $o_1, \ldots, o_m$ i $o'_1, \ldots, o'_m$. Podaj warunek, dla którego stopa podwojenia dla $o_1, \ldots, o_m$ jest wyższa, niż dla $o'_1, \ldots, o'_m$.

Zadanie 7. Rozważmy wyścig z m końmi o prawdopodobieństwach wygranej $p_1, \ldots, p_m$. Gracz obstawia, że dany koń przegra: przy zakładach $b_1, \ldots, b_m$ jeśli koń i wygra, to tracimy b_i ale dostajemy z powrotem $\sum_{j \neq i} b_j$. Uwaga! Zakładamy, że $\sum_i b_i = 1$, ale pozwalamy na ujemne stawki, ale nie większe niż 1: tj. $b_i \in (-\infty, 1)$. Znajdź strategię maksymalizującą stopę podwojenia. Ile ona wynosi?

Zadanie 8 (Paradoks petersburski)**.** Za wpisowe w wysokości c gracz otrzymuje wypłatę w wysokości 2^k z prawdopodobieństwem 2^{-k} dla $k = 1, 2, \ldots$; k interpretujemy jako „pojawienie się pierwszego orła”.

Pokaż, że oczekiwana wypłata dla tej gry jest nieskończona. Z tego powodu argumentowano, że $c = \infty$ jest „sprawiedliwą” ceną, którą trzeba zapłacić i stąd paradoks.

Załóżmy, że gracz może kupić *udziały* w grze: jeśli zainwestuje w grę αc dla $\alpha \geq 0$, to otrzyma $\alpha \cdot X$, gdzie $X = 2^k$ z prawdopodobieństwem $1/2^k$.

Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są i.i.d. zgodnie z rozkładem jak wyżej i gracz inwestuje cały swój majątek, czyli

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{X_i}{c}$$

Pokaż, że istnieje c^* takie że dla $c > c^*$ $\lim S_n = 0$ z prawdopodobieństwem 1 a dla $c < c^*$ wynosi ∞ z prawdopodobieństwem 1. (Jeśli nie wiesz, co to znaczy z prawdopodobieństwem 1, to pokaż wg innej definicji zbieżności).

Zadanie 9. Rozważamy dalej problem z poprzedniego zadania, zakładamy, że możemy wykupić udziały w grze i że gracz może zachować część $(1 - b)$ majątku (i wykupić udziały za część b majątku). Wtedy majątek po n grach to

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - b + \frac{bX_i}{c}\right)$$

Niech

$$W(b, c) = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} \log \left(1 - b + \frac{2^k b}{c}\right)$$
$$W^*(c) = \max_{0 \leq b \leq 1} W(b, c)$$

- Dla jakiej wartości c wartość b^* maksymalizująca $W(b, c)$ spada poniżej 1?
- Jak zmienia się b^* w zależności od c?

Pokaż, że $W^*(c) > 0$, dla wszystkich c.

Zadanie 10. Niech (A, B) tworzy parę wejście-wyjście dla BSC (binary symmetric channel), który zmienia wiadomość z prawdopodobieństwem $1 - p$. Pokaż, że

$$H(B) \geq H(A) \ .$$

Pokaż też, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in \{0, 1\}$ (tzn. kanał jest wierny lub odwrotnie wierny), lub gdy $H(A) = 1$ (tzn. entropia A osiąga wartość maksymalną).