Teoria informacji i kodowania: Lista 7

Wszystkie kanały poniżej są bez pamięci i bez sprzężenia zwrotnego.

Zadanie 1. Niech (X, Y) mają wspólny rozkład $p(x, y)$. Pokaż, że informacja wzajemna $I(X; Y)$ jest wklęsłą funkcją $p(x)$ przy ustalonym $p(y|x)$.

Zadanie 2 (*). Załóżmy, że mamy ustalony kanał Γ, czyli znamy prawdopodobieństwa warunkowe $p(b|a)$.

Na potrzeby zadania, niech $\Delta \circ \Gamma \circ A$ oznacza zmienną losową A przesłaną przez kanał Γ i następnie poprawioną do możliwej wartości przez Δ.

$$\mathbb{P}_p[\Delta \circ \Gamma \circ A = A]$$

będzie prawdopodobieństwem, że poprawnie odczytaliśmy wartość po przejściu przez kanał przy założeniu, że A ma rozkład p.

Zdefiniujmy „średni błąd” reguły Δ, po wszystkich możliwych rozkładach $p \in \mathcal{P}$.

$$\int_{\mathcal{P}} \mathbb{P}_p[\Delta \circ \Gamma \circ = A] dp$$

Pokaż, że Δ_{ML} realizuje infinum średniego błędu, tj.

$$\int_{\mathcal{P}} \mathbb{P}_p[\Delta_{ML} \circ \Gamma \circ = A] dp = \inf_{\Delta} \int_{\mathcal{P}} \mathbb{P}_p[\Delta \circ \Gamma \circ = A] dp$$

Zadanie 3. Niech $C \subseteq \{0, 1\}^n$, przesyłamy $c \in C$ przez BSC (zakładamy, że $p(1|1) = p(0|0) > \frac{1}{7}2$) bit po bicie, otrzymując $\vec{B}$. Pokaż, że reguła Δ_{ML} dla $\vec{B}$ to to samo co zaokrąglanie do najbliższego (wg. odległości Hamminga) słowa kodowego z C.

Zadanie 4. Rozważmy dwa kanały komunikacyjne: $(X_1, p(y_1|x_1), Y_1)$ i $(X_2, p'(y_2|x_2), Y_2)$. Rozważmy nowy kanał, utworzony przez przesyłanie równocześnie X_1 i X_2 przez oba kanały, tzn. kanał $(X_1 \times X_2, p(y_1|x_1) \cdot p'(y_2|x_2), Y_1 \times Y_2)$. Jaka jest przepustowość takiego kanału?

Zadanie 5. Rozważmy dwa kanały komunikacyjne $(X_1, p(y_1|x_1), Y_1)$ i $(X_2, p'(y_2|x_2), Y_2)$. Rozważmy teraz sumę tych kanałów, tzn. kanał w którym przy każdym użyciu możemy wybrać czy przesyłamy informacje przez pierwszy czy przez drugi kanał, ale nie przez obydwa. Pokaż, że przepustowość dla takiego kanału wynosi:

$$C = \sup_{\alpha}(H(\alpha) + \alpha C_1 + (1 - \alpha)C_2),$$

zatem

$$2^C = 2^{C_1} + 2^{C_2} \quad ,$$

gdzie C_1, C_2 to przepustowości odpowiednich kanałów.

Są możliwe przynajmniej dwa podejścia: jedno, poprzez rozważanie informacji wspólnej $I(X; Y)$ — przyjmij, że wysyłamy przez kanał 1 z prawdopodobieństwem α i policzenie ekstremum po α. Drugie — przez transmission rate — jak szybko możemy wysyłać, jeśli możemy korzystać z obu kanałów (odbiorca wie, z którego kanału przyszłą wiadomość). Drugie podejście ma pewną subtelność, którą możesz pominąć: nasza definicja przepustowości mówi o granicy (błąd dąży do 0), zaś to rozumowania będzie gwarantować, że $\liminf$ błędu dąży do zera.

Zadanie 6 (Nierówność Fano przy stałym oszacowaniu X). Niech $\mathbb{P}(X = i) = p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$, gdzie $p_1 \geq p_2 \geq p3 \geq \ldots \geq p_m$. Jeśli chcemy podać stałą estymację X, to minimalne prawdopodobieństwo błędu jest dla $\hat{X} = 1$, a wynikające z niego prawdopodobieństwo błędu to $P_e = 1 - p_1$. Maksymalizujemy $H(p_1, \ldots, p_m)$ przy ograniczeniu $1 - p_1 = P_e$, by znaleźć ograniczenie na P_e względem $H(p_1, \ldots, p_m)$. Jest to nierówność Fano w przypadku braku warunkowania.

Zadanie 7. Kanały z pamięcią mają większą pojemność.

Rozważmy binarny symetryczny kanał $Y_i = X_i +_2 Z_i$, gdzie $+_2$ to dodawanie modulo 2, a $X_i, Y_i, Z_i \in \{0, 1\}$. Załóżmy, że $\mathbb{P}[Z_i = 1] = p$ dla wszystkich i, ale nie zakładamy, że są one niezależne. Ale $(Z_1, \ldots, Z_n)$ jest niezależne od $(X_1, \ldots, X_n)$.

Niech $C = 1 - H(p, 1-p)$. Pokazaż, że

$$\max_{p(x_1,\ldots,x_n)} I(X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots, Y_n) \geq nC.$$

Zadanie 8. Wymazywania i błędy w kanale binarnym.

Rozważmy kanał binarny w którym występują zarówno błędy (z prawdopodobieństwem ϵ) jak i wymazanie (z prawdopodobieństwem α). Czyli ma macierz:

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\alpha-\epsilon \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

Znajdź pojemność tego kanału.

Zadanie 9. Rozważmy kanał komunikacyjny $(X, p(y|x), Y)$. Pokaż, że przepustowość C kanału nie wzrośnie, jeśli pozwolimy na przetworzenie Y funkcją g, tzn.

$$C \geq \max_{p(x)} I(X; g(Y))$$

dla każdej funkcji g. Jakie są konieczne i wystarczające warunki, by przepustowość nie zmalała?

Uwaga: zwróć uwagę, że a priori nie wiemy, że max jest realizowane dla tego samego rozkładu.

Zadanie 10. Rozważmy kanał dla którego

$$Y_i = X_i \cdot Z_i$$

gdzie $Y_i, X_i, Z_i \in \{-1, 1\}$, X_i, Z_i są niezależne i X_i/Y_i to para wejście/wyjście dla i-tego użycia kanału.

- Niech Z_i będą niezależne i o takim samym rozkładzie, tzn.:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

  Znajdź przepustowość tego kanału.

- Niech teraz:

$$Z_1 = \begin{cases} 1 & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{z prawdopodobieństwem } \frac{1}{2} \end{cases} ,$$
$$Z_{i+1} = -Z_i \ .$$

  Czyli kanał jest kanałem z pamięcią.

  Pokaż rodzinę kodów $\{C_n\}$, takich że $C_n \subseteq \{-1, 1\}^n$, jest dla nich reguła dekodowania bez błędu i że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |C_n|}{n} = 1 \ .$$

  Porównaj otrzymaną wartość z wartością uzyskaną w podpunkcie pierwszym.