Teoria informacji i kodowania: Lista 8

Zadanie 1. Udowodnij, że dla kodu C o macierzy parzystości P_C odległość $\mathrm{d}(C)$ kodu C to najmniejsza liczba liniowo zależnych kolumn w macierzy parzystości P_C.

Wsk.: i-ta kolumna to obraz i-tego wektora jednostkowego.

Zadanie 2. Pokaż, że każde słowo długości 7 jest w odległości nie większej niż 1 od jakiegoś słowa kodowego z kodu Hamminga.

Zadanie 3. Dla kodu liniowego C jego *kod rozszerzony* (*extended code*) powstaje przez dopisanie bitu kontroli parzystości, formalnie:

$$\overline{C} = \{(c_1, \ldots, c_k, -\sum_{i=1}^{k} c_i)^T \ : \ (c_1, \ldots, c_k)^T \in C\} \ .$$

Jak wygląda macierz parzystości tego kodu (jeśli znamy P_C)? Pokaż też, że

$$\mathrm{d}(C) \leq \mathrm{d}(\overline{C}) \leq \mathrm{d}(C) + 1 \ .$$

Jaka jest odległość rozszerzonego kodu Hamminga?

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli macierz generatorów jest postaci $G_C = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} \\ X \end{bmatrix}$ (czyli systematyczna) to macierz

$$[-X \,|\, \mathrm{Id}]$$

jest macierzą parzystości tego kodu (uwaga: to są identyczności różnych wymiarów).

Zadanie 5. Pokaż, że dla kodu C istnieje równoważny kod C' dla którego istnieje macierz generatorów w postaci $\begin{bmatrix} \mathrm{Id} \\ M' \end{bmatrix}$.

Zadanie 6 (Ograniczenie Singletona)**.** Pokaż, że dla kodu liniowego $C \leq \mathbb{F}^n$, o wymiarze k zachodzi

$$d(C) \leq n + 1 - k$$

Udowodnij to twierdzenie rozważając macierz parzystości H_C kodu C: Ile kolumn niezależnych może mieć H_C?

Pokaż też ogólną wersję, gdy nie zakładamy, że C jest liniowy:

$$|C| \leq |\mathbb{F}|^{n+1-d(C)} \ .$$

Podziel całe $\mathbb{F}^n$ na „stożki”: jeden stożek ma ustalone pierwsze k współrzędnych i dowolne $n-k$ dalsze współrzędne.

Zadanie 7. Pokaż, że jeśli C jest kodem liniowym to $d(C) = \min_{\vec{v} \in C} ||\vec{v}||_H$.

Zadanie 8. Niech $\vec{v} \in C$, niech $||\vec{e}||_H \leq \frac{d(C)-1}{2}$. Pokaż, że $\Delta_H(\vec{v} + \vec{e}) = \vec{v}$.

Zadanie 9. Pokaż, że jeśli $\vec{X}$ jest zmienną losową z $\mathbb{F}^n$ a M jest odwracalną macierzą $n \times n$ (o elementach z $\mathbb{F}$), to

$$H(\vec{X}) = H(M\vec{X})$$