Teoria informacji i kodowania: Lista 9

Zadanie 1. Niech $\vec{Z} \in \mathrm{Bern}(p)^n$ będzie wektorem o n współrzędnych, każda jest niezależną zmienną Bernoulliego z prawdopodobieństwem 1 równym p.

Niech Q będzie macierzą odwracalną, określmy $\vec{W} = Q\vec{Z}$. Dla $\tau > 0$ rozważmy zbiór współrzędnych $\vec{W}$

$$S_\tau = \{i \in \{1, \dots, n\} \ : \ H(W_i | W_1, \dots, W_{i-1}) \geq \tau\} \ .$$

Pokaż, że

$$|S_\tau| \geq (h(p) - \tau)n$$

Zadanie 2. Niech X będzie zmienną losową o wartościach $0, 1$. Pokaż, że

$$\max(\mathbb{P}[X = 0], \mathbb{P}[X = 1]) \geq 1 - H(X)$$

Zadanie 3. Zdefiniujmy macierze (nad ciałem $\mathbb{F}_2$):

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q_n = \begin{bmatrix} Q_{n/2} & Q_{n/2} \\ Q_{n/2} & 0 \end{bmatrix}$$

Niech $n = 2^k$ oraz $\vec{Z} \in \mathbb{F}_2^n$. Pokaż, jak obliczyć

$$Q_n \vec{Z} \text{ oraz } Q_n^{-1} \vec{Z}$$

w czasie $\mathcal{O}(n \log n)$.

Zadanie 4. Skonstruuj obwód arytmetyczny dla obliczeń z Zadania 3. Jaką mają głębokość?

Zadanie 5. Dla $\epsilon > 0$ i dowolnego n, definiujemy zbiór typowy $A_\epsilon^{(n)}$względem $f(x)$ jako

$$A_\epsilon^{(n)} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{supp}(f) \ : \ \left| -\frac{1}{n} \log(x_1, \dots, x_n) - h(X) \right| \leq \ \epsilon \right\},$$

gdzie $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$, czyli niezależnie po każdej współrzędnej, rozkład jak X.

Pokaż, że zbiór typowy $A_\epsilon^{(n)}$ma następujące własności:

- $\mathbb{P}(A_\epsilon^{(n)}) \geq 1 - \epsilon$.
- $\mathrm{Vol}(A_\epsilon^{(n)}) \leq 2^{n(h(X)+\epsilon)}$ dla wszystkich n;
- $\mathrm{Vol}(A_\epsilon^{(n)}) \geq (1 - \epsilon) 2^{n(h(X)-\epsilon)}$ dla dostatecznie dużych n.

Zadanie 6. Załóżmy, że $h(X)$, $h(Y)$ są określone. Pokaż, że

$$I(X; Y) = \lim_{\Delta \to 0} I(X^\Delta; Y^\Delta)$$

gdzie X^Δ, Y^Δ to odpowiednie kwantyzacje dla X, Y.

Zadanie 7. Niech $h(X)$ będzie określone. Pokaż, że

$$h(X + c) = h(X)$$
$$h(aX) = h(X) + \log a$$

Neich $\vec{X}$ będzie wektorem n elementowym, a A macierzą $n \times n$. Pokaż, że

$$h(A\vec{X}) = h(\vec{X}) + \log |\det(A)|$$

Zadanie 8. Niech $h(X_1), \dots, h(X_n)$ będą określone. Pokaż, że

$$h(X_1, \dots, X_n) \leq \sum_i h(X_i)$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $X_1, \dots, X_n$ są niezależne.

Zadanie 9. Pokaż, że jeśli K jest macierzą dodatnio określoną, to

$$\det K \leq \left|\prod_{i=1}^{n} k_{i,i}\right|$$

W tym celu rozważ rozkład wielonormalny o macierzy kowariancji K (możesz bez dowodu przyjąć, że taki rozkład istnieje) i oszacuj jego entropię poprzez entropię rzutów na poszczególne osie.

Zadanie 10 (Wklęsłość logarytmu wyznacznika)**.** Niech K_1, K_2 będą dwiema symetrycznymi dodatnio określonymi macierzami $n \times n$ (dowód przechodzi też dla nieujemnie określonych) a $0 \leq \lambda \leq 1$ będzie liczba rzeczywistą. Pokaż, że

$$|\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2| \geq |K_1|^\lambda |K_2|^{1-\lambda}$$

W tym celu rozważ rozkłady wielonormalne Z_1, Z_2 o macierzach kowariancji K_1, K_2 i θ o rozkładzie Bernoulliego z prawdopodobieństwem λ. Rozważ Z_θ i $h(Z|\theta) \leq h(Z)$.