Teoria informacji i kodowania: Lista 10

Zadanie 1 (Ograniczenie mocy wyjściowej)**.** Rozważmy kanał gaussowski z addytywnym szumem gaussowskim i ograniczeniem P na oczekiwaną mocą *wyjściową*, tj. $Y = X + Z$, $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, Z jest niezależny od X, oraz $\mathbb{E}[Y^2] \le P$.

Znajdź pojemność informacyjną tego kanału.

Zadanie 2. Niech wektor losowy $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ ma średnią $\vec{0}$ i macierz kowariancji $K = \mathbb{E}[XX^T]$ (tzn. $K_{ij} = \mathbb{E}[X_i X_j]$). Pokaż, że

$$h(X) \le \frac{1}{2} \log\left((2\pi e)^n |K|\right),$$

i równość zachodzi tylko dla $\vec{X} \sim \mathcal{N}(0, K)$.

Wsk.: Dowód jak dla przypadku jednowymiarowego. Można też przeprowadzić ortonormalizację współrzędnych względem kowariancji jako iloczynu skalarnego.

Zadanie 3 (Transformata Fouriera)**.** Rozważmy funkcje $f : [-1; 1] \to \mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym ($i = \sqrt{-1}$)

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g}(x)dx$$

Pokaż, że funkcje $f_k(x) = e^{ik\pi x}$ dla $k \in \mathbb{Z}$ są parami prostopadłe (w szczególności: są liniowo niezależne) i mają normę 1. Dla funkcji f liczby $a_k = \langle f, f_k \rangle$ to współczynniki Fouriera. W dalszej części będziemy się zajmować tylko funkcjami, gdy f jest skończoną kombinacją liniową takich funkcji.

Zadanie 4. Załóżmy, że funkcja f ma wartości rzeczywiste. Co umiesz powiedzieć o współczynnikach Fouriera f?

Podaj alternatywną bazę (dla funkcji o wartościach rzeczywistych) używająca tylko funkcji o wartościach rzeczywistych.

Zadanie 5 (Dyskretna Transformata Fouriera)**.** Załóżmy, że $f[-1; 1] \to \mathbb{R}$ ma reprezentację

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k + \sum_{k=-1}^{-n} b_k f_k$$

Pokaż, jak wyliczyć a_k, b_k (albo współczynniki przy alternatywnej bazie z poprzedniego zadania) z wartości w punktach $f(\frac{k}{n})$ dla $-n \le k \le n$.

Zadanie 6. Niech $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ a $\hat{X}$ będzie kwantyzacją spełniająca warunek

$$\mathbb{E}[(X - \hat{X})^2] \le D$$

Pokaż, że

$$I(X, \hat{X}) \ge \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma^2}{D}\right)$$

Wsk.: $h[X|\hat{X}] = h[X - \hat{X}|\hat{X}] \le h[X - \hat{X}]$.

Zadanie 7 (Funkcja z nieskończonym zniekształceniem)**.** Znajdź (teorio-informacyjne) rate-distortion

$$R^I(D) = \min_{p(\hat{x}|x): \sum_{x,\hat{x}} p(x)p(\hat{x}|x)d(x,\hat{x}) \le D} I(X; \hat{X})$$

dla $X \sim \mathrm{Bern}(1/2)$ i miarą zniekształcenia

$$d(x, \hat{x}) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x = \hat{x} \\ 1 & \text{jeśli } x = 1, \hat{x} = 0 \\ \infty & \text{jeśli } x = 0, \hat{x} = 1 \end{cases}$$

Zadanie 8 (∗). Zdefiniowaliśmy

$$R^I(D) = \min_{p(\hat{x}|x):\sum_{x,\hat{x}} p(x)p(\hat{x}|x)d(x,\hat{x})\leq D} I(X;\hat{X})$$

używając minimum po $p(\hat{x}|x)$. W zamyśle $\hat{X}$ jest kwantyzacją, czyli oczekujemy, że wystarczy rozważać $p(\hat{x}|x)$ które jest skupione w punkcie, tzn. dla danego x istnieje dokładnie jedno $\hat{x}$. t. że $p(\hat{x}|x) = 1$, a dla pozostałych $\hat{x}'$ mamy $p(\hat{x}'|x) = 0$.

Udowodnij lub pokaż kontrprzykład, że wystarczy się ograniczyć do takich rozkładów. Możesz przyjąć dodatkowe założenie na d, jeśli to pomoże (np. że jest ograniczone).

Zadanie 9. Rozważmy $I(X;Y)$ i rozkłady $p(x)$ i $p(y|x)$. Pokaż, że

- przy ustalonym $p(x)$ $I(X;Y)$ jest wypukłą funkcją $p(y|x)$
- przy ustalonym $p(x|y)$ $I(X;Y)$ jest wklęsła funkcją $p(x)$

Możliwe, że łatwiej będzie to zrobić używając różnicy entropii albo definicji przez dywergencję KL.

Zadanie 10 (Własności $R(D)$). Rozważmy dyskretne źródło $X \in \mathcal{X} = \{1,\ldots,m\}$ z rozkładem $p_1,\ldots,p_m$ i miarą zniekształcenia $d(i,j)$. Niech $R(D)$ to ratio distortion w tym scenariuszu.

Zdefiniujmy $d'(i,j) = d(i,j) - w_i$, (uwaga: d' dalej ma spełniać $d' \geq 0$) i niech $R'(D)$ będzie odpowiadającą ratio distortion. Pokaż, że $R(D) = R(D + \sum_i p_i w_i)$. Wywnioskuj z tego, że bzo. można zakładać, że dla każdego $x \in \mathcal{X}$ istnieje $\hat{x}$, taki że

$$\min_{\hat{x}} d(x.\hat{x}) = 0$$

Zadanie 11 (Źródło jednorodne z miarą zniekształcenia Hamminga). Rozważmy źródło X równomiernie rozłożone na zbiorze $\{1,\ldots,m\}$. Znajdź ratio distortion dla tego źródła ze zniekształceniem Hamminga, czyli,

$$d(x,\hat{x}) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x = \hat{x} \\ 1 & \text{jeśli } x \neq \hat{x} \end{cases}$$

Wsk.: Zastosuj lepszą wersję nierówności Fano do $H[X|\hat{X}]$ do oszacowania. Podaj konkretny rozkład łączny, prościej wskazać $p(x|\hat{x})$.

Zadanie 12. Niech $R(D)$ będzie rate distortion dla źródła X i miary zniekształcenia d. Ile wynosi rate distortion $R'(D)$ dla miary zniekształcenia $d' = ad + b$ ($a > 0$, $b \neq 0$ ale zakładamy, że $d' \geq 0$.)

Zadanie 13. Niech $R(D)$ będzie rate distortion dla (skończonego) źródła X i miary zniekształcenia d. Pokaż, że

- $R(D)$ jest wypukłą funkcją D; nie korzystając z równości $R = R^I$, udowodnij korzystaj z definicji osiągalnych par (R,D).

  Wsk.: Skorzystaj z faktu, że X_i są niezależne i dla dwóch kodów C_1, C_2 zbuduj kod z których jeden koduje αn pierwszych symboli, a drugi koduje $(1-\alpha)n$ kolejnych symboli.
- $R(D)$ jest nierosnąca
- $R(0) \leq H(X)$
- $R(\sup d) = 0$

Zadanie 14 (Rate distortion dla dla dwóch niezależnych źródeł). Niech X, Y o rozkładach $p(x), p(y)$ będą niezależne, z miarami zniekształcenia $d_X(x,\hat{x})$ i rate distortion $R_X(D)$ i analogicznie dla Y mamy $d_Y(y,\hat{y})$ i $R_Y(D)$; zakładamy, że d_X, d_Y są ograniczone.

Chcemy teraz kwantyzować parę wartości (X,Y) przy ograniczeniach D_X, D_Y, tj. patrzymy na

$$R_{X,Y}(D_X,D_Y) = \min_{\substack{p(\hat{x},\hat{y}|x,y):\\ \sum_{x,\hat{x}} p(x)p(\hat{x}|x)d(x,\hat{x})\leq D_X \\ \sum_{y,\hat{y}} p(y)p(\hat{y}|y)d(y,\hat{y})\leq D_Y}} I(X,Y;\hat{X},\hat{Y})$$

Pokaż, że

$$R_{X,Y}(D_X, D_Y) \geq R_X(D_X) + R_Y(D_Y)$$

Czy zachodzi równość?