Lista 1

Zadanie 1. Pokaż, że $\mathbb{Z}_p$ istnieje element odwrotny, tj. dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p$ różnego od 0 istnieje a^{-1} takie że $a \cdot a^{-1} = 1$. Możesz to zrobić według następującego schematu:

- dla ustalonego $a \neq 0$ rozważ $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$;
- pokaż, że elementy w tym ciągu są niezerowe i różne;
- wywnioskuj z tego, że a ma element odwrotny w $\mathbb{Z}_p$.

Zadanie 2. Sprawdź, czy następujące podzbiory $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami liniowymi:

1. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 5a + 2b = 0\}$
2. $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
3. $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
4. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
5. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 1\}$
6. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 0\}$
7. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 1\}$
8. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
9. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$

Zadanie 3. Rozważmy zbiór wszystkich (nieskończonych) ciągów o elementach w $\mathbb{R}$. Definiujemy dodawanie takich ciągów po współrzędnych, tak samo mnożenie przez skalar, tj.:

$$(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots), \quad \alpha(a_1, a_2, \dots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots)\ .$$

Jest to przestrzeń liniowa, gdzie $\vec{0}$ to ciąg złożony z samych 0. Dla podanych poniżej podzbiorów tej przestrzeni liniowej określ, które z nich są podprzestrzeniami liniowymi, a które nie. Odpowiedzi *uzasadnij.*

(a) Zbiór ciągów $(a_1, a_2, \dots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $a_n = n \cdot a_{n-1} + n^2 \cdot a_{n-2}$.

(b) Zbiór ciągów $(b_1, b_2, \dots)$ takich, że dla każdego $n \geq 2$ mamy $b_n = 3 \cdot b_{n-1} + 2^n - 1$.

(c) Zbiór ciągów $(c_1, c_2, \dots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-2}$.

(d) Zbiór ciągów $(d_1, d_2, \dots)$ takich, że skończenie wiele liczb spośród $d_1, d_2, \dots$ jest dodatnia.

Zadanie 4. Niech $\mathbb{V}$ — przestrzeń liniowa nad $\mathbb{F}$ oraz $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ będą jej podprzestrzeniami.

Pokaż, że $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest najmniejszą przestrzenią liniową zawierającą $\mathbb{W}$ i $\mathbb{W}'$.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{V}$ — przestrzeń liniowa nad $\mathbb{F}$ oraz $\mathbb{W}_i \leq \mathbb{V}$ dla $i \in I$ będą jej podprzestrzeniami. Pokaż, że $\bigcap_{i \in I} \mathbb{W}_i$ jest największą przestrzenią liniową zawartą w każdej z $\mathbb{W}_i$.

Pokaż też, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_k$ nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, iloczyn kartezjański $\prod_{i=1}^k \mathbb{V}_i$ z dodawaniem i mnożeniem po współrzędnych, jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Zadanie 6. Pokaż (nie używając pojęcia wymiaru ani niezależności liniowej), że każda podprzestrzeń liniowa $\mathbb{R}^2$ jest jednej z postaci:

- jedynie wektor zerowy: $\{\vec{0}\}$
- wielokrotności ustalonego wektora z $\mathbb{R}^2$ (czyli wektory stanowiace prostą przechodzącą przez $(0,0)$)
- całe $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 7. Niech $\mathbb{V}$, przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{F}$, $U = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ będzie układem wektorów z $\mathbb{V}$, zaś $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ ciąg skalarów, takich że $\alpha_1 \neq 0$. Pokaż, że

$$\mathrm{LIN}\left(\left\{\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, v_2 \dots, v_k\right\}\right) = \mathrm{LIN}\left(\{v_1, v_2 \dots, v_k\}\right).$$

Zadanie 8. Przedstaw wektor $\vec{W}$ jako kombinację podanych wektorów $\vec{V_1}, \dots, \vec{V_k}$ (lub uzasadnij, że to niemożliwe), nad ciałem $\mathbb{R}$:

1. $\vec{W} = (1,5)$, $\vec{V_1} = (1,1)$, $\vec{V_2} = (2,0)$.

2. $\vec{W} = (5, 10, 11)$, $\vec{V_1} = (1, 2, 3)$, $\vec{V_2} = (0, 3, 2)$, $\vec{V_3} = (1, 1, 1)$.
3. $\vec{W} = (5, 10, 11)$, $\vec{V_1} = (1, 2, 3)$, $\vec{V_2} = (0, 3, 2)$, $\vec{V_3} = (1, 8, 7)$.
4. $\vec{W} = (4, 17, 18)$, $\vec{V_1} = (1, 2, 3)$, $\vec{V_2} = (0, 3, 2)$, $\vec{V_3} = (3, 9, 11)$.

Zadanie 9. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Z}_3^3$ (zbiór trzyelementowych ciągów elementów z $\mathbb{Z}_3$, nad ciałem $\mathbb{Z}_3$). Ile wektorów należy do $\mathrm{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 1))$? A ile do $\mathrm{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 2))$?

Zadanie 10. Pokaż następujące fakty wprost z definicji, tj. rozpisując odpowiednie kombinacje liniowe:

- Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, $U \subseteq \mathbb{V}$ układam wektorów. Wtedy:
$$\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(\mathrm{LIN}(U)) \ .$$
- Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{V}$ wektorami z tego ciała. Jeśli skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ są niezerowe to
$$\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \mathrm{LIN}(\alpha_1 \vec{v}_1, \dots, \alpha_k \vec{v}_k).$$
- Dla $i \neq j$ oraz skalara $\alpha \in \mathbb{F}$
$$\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \alpha \vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_k).$$

Zadanie 11 (* nie liczy się do podstawy). Dla przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{R}$ (lub $\mathbb{Q}$) *kombinacją wypukłą* wektorów $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ jest kombinacja liniowa $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i$ przy czym $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ i $0 \leq \alpha_i \leq 1$ dla każdego $1 \leq i \leq k$.

Pokaż, że w $\mathbb{R}^2$ kombinacja wypukła wektorów $\vec{V_1}, \dots, \vec{V_k}$ to najmniejszy wielokąt wypukły zawierający je wszystkie. (Wielokąt jest wypukły, jeśli nie ma kąta większego niż 180^0.)