Lista 2

Zadanie 1. Na wykładzie pokazaliśmy, że: U jest zbiorem liniowo zależnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim wektor $\vec{u} \in U$, taki że
$$\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(U \setminus \{\vec{u}\}).$$
Pokaż też, że jeśli U nie zawiera wektora zerowego $\vec{0}$, to są przynajmniej dwa takie wektory $\vec{u}$.

Zadanie 2. Pokaż równoważność następujących warunków (dla $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{V}$):

1. Układ B jest liniowo niezależny.
2. Wektor $\vec{0}$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
3. Pewien wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
4. Każdy wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów z B.

Zaneguj powyższe warunki, aby uzyskać charakteryzację zbiorów liniowo zależnych.

Zadanie 3. Rozważamy przestrzenie nad $\mathbb{R}$. Niech $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ układy wektorów

- $\{\alpha\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2\}$
- $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_3 + \vec{v}_4, \dots, \vec{v}_{n-1} + \vec{v}_n, \vec{v}_n + \alpha\vec{v}_1\}$

są liniowo niezależne?

Zadanie 4. Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$)? Rozszerz ich (dowolny) maksymalny podzbiór niezależny do bazy.

1. $(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1), (1,0,1)$;
2. $(0,1,2), (1,1,1), (1,1,1)$;
3. $(1,0,1,0), (1,2,0,1), (0,2,1,1), (0,0,1,1)$;
4. $(1,0,1,0), (0,2,0,2), (1,1,0,0), (0,0,2,1)$.

Zadanie 5. Uzasadnij, że poniższe zbiory wektorów są liniowo niezależne (w odpowiednim $\mathbb{R}^n$), rozszerz je do bazy (odpowiedniego) $\mathbb{R}^n$:

- $(2,2,7,-1), (3,-1,2,4), (1,1,3,1)$;
- $(2,3,-4,-1), (1,-2,1,3)$;
- $(2,3,5,-4,1), (1,-1,2,3,5)$.

Zadanie 6. Niech M będzie zbiorem skończonym. Na zbiorze jego podzbiorów 2^M określamy operacje:
$$U + U' := U \triangle U', \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$
gdzie $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną, tj. $U \triangle U' = (U \setminus U') \cup (U' \setminus U)$. Pokaż, że tak określony zbiór jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$.

Niech $U_1, U_2, \dots, U_k \subseteq M$ są takie, że dla każdego i zbiór U_i nie jest podzbiorem sumy pozostałych zbiorów, tj. $U_i \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} U_j$. Pokaż, że $U_1, U_2, \dots, U_k$ są liniowo niezależne.

Podaj (naturalną) bazę tej przestrzeni liniowej. Czy potrafisz naturalnie zinterpretować izomorfizm zadany przez wyrażanie w tej bazie?

Zadanie 7. Niech $\mathbb{U}, \mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$. Udowodnij zawieranie:
$$(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}') \leq \mathbb{U} \cap (\mathbb{W} + \mathbb{W}')$$
Pokaż, że jeśli $\mathbb{W} \leq \mathbb{U}$ to w zachodzi równość obu stron powyższego zawierania.

Zadanie 8. Niech $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ będzie izomorfizmem przestrzeni liniowych. Pokaż, że $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{V}$ jest liniowo niezależny/jest liniowo zależny/jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_k) \in \mathbb{V}'$ jest liniowo niezależny/jest liniowo zależny/jest bazą.

Zadanie 9. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią skończenie wymiarową. Pokaż, że:

- Każdy niezależny układ wektorów $A \subseteq \mathbb{V}$ można rozszerzyć do bazy $\mathbb{V}$.
- Z każdego układu wektorów $A \subseteq \mathbb{V}$ można wybrać bazę przestrzeni $\mathrm{LIN}(A)$.

Zalecane jest skorzystanie z Lematu Steinitza.

Zadanie 10. Wyraź w bazie $B = \{(1, 2, 3); (0, 1, 2); (0, 0, 1)\}$ wektory

- $(1, 0, 0)$
- $(0, 1, 0)$
- $(0, 0, 1)$
- $(7, 3, 2)$

Zadanie 11 (* Nie liczy się do podstawy.)**.** *Uwaga: w tym zadaniu nie można korzystać z twierdzenia o równoliczności baz ani z lematu o wymianie.*

Używając eliminacji Gaußa udowodnij następujące twierdzenie:
Jeśli $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, to zbiór liczący $k + 1$ wektorów jest liniowo zależny.

W tym celu wyraź wektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+1}$ w bazie B i przeprowadź na tej reprezentacji eliminację Gaußa.

Wywnioskuj z tego twierdzenia, że każde dwie bazy przestrzeni skończenie wymiarowej są równoliczne.