Lista 4

Zadanie 1. Wyznacz bazę obrazu dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$).
- $F(x,y,z) = (2x+y, 3x-z, 5x+y-z, -2x+2y-2z)$;
- $G(x,y,z) = (x+y, y-2z, 3z, x-y)$;
- $H(x,y,z) = (x+y, y+z)$;

Wskazówka: Skorzystaj z faktu: jeśli $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $\mathrm{LIN}(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}) = \mathbb{V}$ to $\mathrm{LIN}(F(\vec{v_1}), \dots, F(\vec{v_k})) = \mathrm{Im}\, F$.

Zadanie 2. Wyznacz bazę jądra dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)
- $H(x,y,z) = (x+y, y+z)$;
- $I(x,y,z) = (x+y, 2y+z, y-z)$;
- $J(x,y,z) = (x+y, 2x+2y, 3x+3y)$.

Wskazówka: Ułóż odpowiedni układ równań.

Zadanie 3. Rozważmy przestrzeń wielomianów o stopniu najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ oraz przekształcenie liniowe zdefiniowane jako suma pierwszej i drugiej pochodnej, tj.:

$$F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2} \ ,$$

gdzie $i(i-1)x^{i-2}$ dla $i < 2$ oznacza 0.

Podaj bazy jądra $\ker F$ i obrazu $\mathrm{Im}\, F$ tego przekształcenia. Podaj ich wymiary.

Zadanie 4. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:
- F jest różnowartościowe;
- $\dim(\ker(F)) = 0$;
- $\ker(F)$ składa się z jednego wektora;
- $\dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(\mathbb{V})$.

Zadanie 5. Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalara α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierze identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynkę oraz zera w innych miejscach):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id} \cdot A = A \quad B \cdot \mathrm{Id} &= B \\
A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\
(A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\
\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B &= A \cdot (\alpha B) \\
A[B|C] &= [AB|AC] \\
\left[\frac{B}{C}\right] A &= \left[\frac{BA}{CA}\right]
\end{aligned}$$

Zadanie 6. Pokaż, że mnożenie macierzy jest łączne.

Wskazówka: Możesz korzystać bezpośrednio z definicji oraz z Zadania 5. Przy bardziej skomplikowanych zastanów się, czy nie korzystasz z łączności. Bardzo pomocne może być korzystanie z liniowości.

Zadanie 7. Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B, takich że $AB = BA$, jest przestrzenią liniową. Pokaż też, że dla takich macierzy (tj. kwadratowych spełniających $AB = BA$) zachodzi

$$(A + B)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^i B^{m-i} \ .$$

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.

Wskazówka: Można na palcach, ale można też prawie bez rachunków: zauważ, że każda macierz komutuje z Id oraz M komutuje z M. Oblicz też wymiar przestrzeni tych macierzy.

Zadanie 8. Podaj zwartą postać macierzy (nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n \quad .$$

Postać zwarta nie zawiera sum, wielokropków itp.

Wskazówka: Pomocne może być przedstawienie macierzy jako $\alpha \operatorname{Id} + J$, gdzie $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$. Skorzystaj z Zadania 7.

Zadanie 9. Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 10. Pokaż, że dla macierzy A, B odpowiednich rozmiarów zachodzi

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad ,$$
$$(A^T)^T = A$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad .$$

Zadanie 11 (* nie liczy się do podstawy; niezbyt trudne)**.** Niech M będzie macierzą kwadratową zadaną jako

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} ,$$

dla pewnej λ. Podaj zwartą postać macierzy M^k dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Wskazówka: Przedstaw $M = \lambda \operatorname{Id} + J$, skorzystaj z Zadania 7. Ile wynosi $J\vec{E}_i$?